CEFET/RJ
DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

AUTOVALORES DA MATRIZ A_α DE OPERAÇÕES ENTRE GRAFOS

Uilton Cesar Peres Junior

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção e Sistemas, Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca CEFET/RJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre.

Orientadores:
Carla Silva Oliveira
André Ebling Brondani

Rio de Janeiro,
Abril de 2024

Autovalores da matriz A_α de operações entre grafos

Dissertação de Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas, Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, CEFET/RJ.

Uilton Cesar Peres Junior

Aprovada por:

Presidente, Profª. Carla Silva Oliveira, D.Sc. (orientadora)

Prof. André Ebling Brondani, D.Sc. (coorientador)

Prof. Celso Marques da Silva Junior, D.Sc.

Profª Claudia Marcela Justel, D.Sc.

Profª Cybele Tavares Maia Vinagre, D.Sc.

Prof. Germain Aliro Pastén Tabilo, D.Sc.

Rio de Janeiro,

Abril de 2024

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central do CEFET/RJ

P437 Peres Junior, Uilton Cesar
Autovalores da matriz Aα de operações entre grafos / Uilton Cesar Peres Junior. — 2024.
102f. : il. color. , enc.

Dissertação (Mestrado) Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca , 2024.
Bibliografia : f. 100-102
Orientadora: Carla Silva Oliveira
Coorientador: André Ebling Brondani

1. Teoria dos grafos. 2. Matrizes (Matemática). 3. Análise espectral. I. Oliveira, Carla Silva. (Orient.). II. Brondani, André Ebling. (Coorient.). III. Título.

CDD 511.5

Elaborada pela bibliotecária Tania Mello – CRB/7 nº 5507/04

DEDICATÓRIA

Dedico este texto ao pequeno Uilton, que sonhava ser cientista.

AGRADECIMENTOS

Inicio agradecendo à minha mãe e ao meu falecido pai, por todo apoio, amparo e incentivo.

Agradeço aos meus orientadores, Carla Silva Oliveira e André Ebling Brondani por todo conhecimento, dedicação e paciência.

Aos amigos Matheus Nery, Mariana Silva, Aline Reis, Gabriel Medeiros, Mateus Sant'Anna, Larissa Farias, Nubia Garcia e Erick Landim, pela amizade e parceria, construídos desde a graduação. À minha prima Danielle Peres, por toda amizade, companheirismo e incentivo desde minha lembrança mais antiga. Aos amigos Elcio Veloso e Fernanda Araújo que me acompanham desde o ensino fundamental.

Agradeço aos professores Celso Marques, Claudia Justel, Cybele Tavares e Germain Pastén por terem aceitado compor a banca examinadora desta dissertação.

Por fim, agradeço a todos aqueles que contribuíram de alguma forma com a minha formação e a produção deste texto.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

Autovalores da matriz A_α de operações entre grafos

Uilton Cesar Peres Junior

Orientadores:
Carla Silva Oliveira
André Ebling Brondani

Sejam G um grafo conexo de ordem n, $A(G)$ a matriz de adjacência, $D(G)$ a matriz diagonal dos graus de G e $\alpha \in [0, 1]$. Em 2017, Nikiforov propôs uma combinação linear convexa de $A(G)$ e $D(G)$, dada por:

$$A_\alpha(G) = \alpha D(G) + (1 - \alpha)A(G).$$

Nesta dissertação, estudamos o espectro da matriz A_α de algumas operações entre grafos e desenvolvemos alguns resultados originais.

Palavras-chave: Operações em grafos. Matriz A_α. Espectro.

Rio de Janeiro,

Abril de 2024

ABSTRACT

Eigenvalues of the matrix A_α of operations between graphs

Uilton Cesar Peres Junior

Advisors:
Carla Silva Oliveira
André Ebling Brondani

Let G be a connected graph of order n, $A(G)$ the adjacency matrix, $D(G)$ the diagonal matrix of degrees of G and $\alpha \in [0, 1]$. In 2017, Nikiforov proposed a convex linear combination defined given by:

$$A_\alpha(G) = \alpha D(G) + (1 - \alpha)A(G),$$

where $\alpha \in [0, 1]$. In this dissertation, we study the spectrum of the A_α matrix of some operations between graphs and develop some original results.

Keywords: Graph operations. A_α Matrix. Spectrum.

Rio de Janeiro,

Abril de 2024

Sumário

I Introdução **12**

II Preliminares **14**

II.1 Teoria de Matrizes 14

II.2 Teoria de Grafos 20

III Teoria Espectral de Grafos **25**

III.1 Matriz de adjacência 25

III.1.1 O espectro de certas classes de grafos 31

III.1.2 Isomorfismo de grafos e invariantes 37

III.2 Matriz laplaciana sem sinal 43

III.2.1 Matriz de Incidência 43

III.2.2 A Matriz laplaciana sem sinal 49

III.3 Matriz A_α 55

III.3.1 Propriedades Básicas da Matriz A_α 56

III.3.2 Positividade semidefinida de $A_\alpha(G)$ 62

III.3.3 Algumas cotas para os autovalores da matriz A_α baseadas em grau 64

IV O A_α-espectro de operações entre grafos **66**

IV.1 Operações união, *join*, e H-*join* 66

IV.2 Produtos de grafos 68

IV.2.1 Produto cartesiano de grafos 69

IV.2.2 Produto direto de grafos 70

IV.2.3 Produto forte de grafos 71

IV.2.4 Produto composição de grafos 72

IV.3 Outras operações 73

V Resultados obtidos **79**

V.1 Operação *shadow* 79

V.2 Operação *blow-up* 83

V.3 Operação *splitting* 89
V.4 Grafo *block-indifference* 94

VI Considerações finais e trabalhos futuros **98**
Referências 100

Lista de Figuras

II.1 Grafo com 4 vértices e 5 arestas. 21

II.2 G_1 desconexo e G_2 conexo. 23

II.3 Grafos bipartidos $K_{1,4}$ e $K_{2,2}$. 23

II.4 G e $G - v_2$, respectivamente. 24

II.5 Exemplo de k-coloração, k-coloração própria e grafo $\chi(G)$-cromático, respectivamente. 24

III.1 Grafo de ordem 5 e tamanho 6. 26

III.2 Grafo de ordem 4 e tamanho 5. 29

III.3 Grafos com o mesmo polinômio característico. 30

III.4 G e $G' = G - c$. 31

III.5 $P_3 \vee P_2$. 33

III.6 G e $\overline{G}$, respectivamente. 36

III.7 Duas visualizações do grafo de Petersen. 37

III.8 Grafo de ordem 10. 38

III.9 Grafos não isomorfos, mas com a mesma sequência de graus. 39

III.10 Grafos isomorfos. 40

III.11 Grafos co-espetrais não isomorfos. 42

III.12 Grafo de ordem 5 e tamanho 6. 44

III.13 Um grafo e seu grafo linha. 44

III.14 $K_{1,4}$ 46

III.15 Grafo de ordem 6 e tamanho 5. 47

III.16 Grafos linha coespectrais 52

IV.1 Grafo $\bigvee_{K_3}\{2K_1, 4K_1, 3K_1\}$. 68

IV.2 Grafo $\bigvee_{P_3}\{C_4, K_2, 2K_1\}$. 68

IV.3 Grafos P_3, P_2 e $P_3 \times P_2$, respectivamente. 69

IV.4 Grafo $P_3 \odot P_2$. 70

IV.5 Grafo $P_3 \otimes P_2$. 71

IV.6 Grafo $P_3 \circ P_2$. 72

IV.7 Exemplos de *pineapple*, KK_n^ℓ e $\mathcal{H}_n^\ell$ 73
IV.8 Exemplo de coalescência dos grafos K_4 e K_3. 74
IV.9 Exemplos de *block-indifference*. 74
IV.10 Grafos $F_{1,2,1}$ e $F_{3,4,2}$, respectivamente. 75

V.1 C_4 e $D_2(C_4)$ 79
V.2 Grafos *blow-up* 83
V.3 Grafos $K_{1,3}$ e $K_{1,3}^{(2)}$, respectivamente. 85
V.4 Grafo de Petersen e seu *blow-up*, respectivamente. 87
V.5 Grafos blow-up 88
V.6 Grafo $\mathcal{H}_3^2$ e o seu *blow-up* $\mathcal{H}_3^{2(2)}$, respectivamente. 89
V.7 $K_{1,3}$ e $S(K_{1,3})$, respectivamente. 90
V.8 K_4 e $S(K_4)$ 93
V.9 Grafo $R_3[4]$ 94

VI.1 Grafo $K_6^{2,2}$. 98
VI.2 Exemplos da família $F_{a_1,a_2,\ldots,a_k}$. 99

Capítulo I Introdução

A Teoria dos Grafos é um ramo da matemática que estuda as relações e conexões entre objetos por meio de estruturas abstratas chamadas de grafos. Os grafos consistem em vértices interconectados por arestas, e sua representação geométrica pode ser aplicada em diversas situações práticas, como redes de transporte e interações em redes sociais. A Teoria dos Grafos oferece ferramentas para analisar a complexidade das relações entre elementos, resolver problemas de otimização e modelar uma ampla gama de fenômenos em áreas como ciência da computação, engenharia, biologia, economia, dentre outras. Operações em grafos produzem novos grafos a partir dos grafos iniciais. É possível criar uma diversidade de outros grafos apenas por remover ou adicionar vértices ou arestas de um grafo. Existem operações efetuadas sobre um único grafo e outras, cujos resultados são obtidos a partir de dois ou mais grafos. Essas operações de perturbação na estrutura do grafo possibilitam a obtenção de uma gama variada de configurações de novos grafos, cada uma com suas próprias características e propriedades.

A Teoria Espectral dos Grafos (TEG) é um campo interdisciplinar dinâmico que busca encontrar relações entre propriedades estruturais dos grafos e os autovalores de matrizes associadas a eles, como por exemplo a matrizes de adjacência, laplaciana e a laplaciana sem sinal. A TEG emergiu a partir das interações entre a Álgebra Linear e a Teoria dos Grafos, visando transformar características dos grafos em propriedades algébricas. Desde sua aplicação inicial em Química Quântica [Hückel, 1931], expandiu-se para diversas disciplinas, incluindo Física, Ciência da Computação e Otimização Combinatória.

Em 2017, Nikiforov [Nikiforov, 2017] introduziu o conceito da matriz A_α, um conjunto de matrizes que contém a matriz de adjacência e a matriz laplaciana sem sinal. Deste ponto de vista, é interessante estudar a matriz A_α pois ela unifica a teoria destas duas matrizes e a partir disto diversos resultados acerca deste tópico foram discutidos, como por exemplo em [Nikiforov *et al.*, 2017] e [Nikiforov e Rojo, 2017]. Alguns artigos explicitam os autovalores da matriz A_α de algumas classes e operações em grafos, como vemos em [Nikiforov, 2017], [Brondani *et al.*, 2019], [Brondani *et al.*, 2022], [Lin *et al.*, 2018], [Rojo, 2024].

Motivados pelos trabalhos supracitados, investigamos as operações *shadow, splitting, blow-up* e *block-indifference*. Explicitamos os autovalores da matriz A_α do *shadow* e do *blow-up* de um grafo a partir dos autovalores da matriz A_α do grafo inicial. Também determinamos o polinômio

característico da matriz A_α do grafo *splitting* de um grafo regular em função dos autovalores de sua matriz de adjacência. Além disso, estudamos os autovalores da matriz A_α do grafo *block-indifference* para mais de duas cliques, todas de mesma ordem.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: no Capítulo II são apresentadas as definições e resultados de Álgebra Linear e Teoria dos Grafos que são utilizados ao longo do trabalho; no Capítulo III é feito um estudo da matrizes de adjacência, laplaciana sem sinal e A_α. No Capítulo IV apresentamos o estado da arte referente ao tópico deste trabalho, os autovalores da matriz A_α de operações entre grafos. No Capítulo V são apresentados os resultados que obtivemos até o momento, e, finalmente, no Capítulo VI, as propostas de trabalhos futuros acerca do tópico abordado nesta dissertação.

Capítulo II Preliminares

Neste capítulo, introduzimos alguns conceitos e resultados acerca da Teoria de Grafos, e Teoria de Matrizes que são utilizados ao longo do texto.

II.1 Teoria de Matrizes

Nesta seção, relembramos alguns resultados sobre matrizes e determinantes, que são importantes para o desenvolvimento deste trabalho e que podem ser encontrados em [Horn e Johnson, 2013].

Denotemos por $\mathbb{M}_{m,n}$ o espaço vetorial real das matrizes com m linhas e n colunas. Quando $m = n$, simplesmente, escrevemos $\mathbb{M}_n$. A matriz identidade em $\mathbb{M}_n$ é denotada por I_n, a matriz $J_{m,n} \in \mathbb{M}_{m,n}$ é aquela cujas entradas são todas iguais a 1 e a matriz em que todas entradas são iguais a 0 é denotada por $\mathbf{0}_{m,n}$. Uma matriz em $\mathbb{M}_n$ é denominada *matriz de permutação* se em cada linha e em cada coluna há $n - 1$ entradas nulas e uma única entrada igual a 1. Uma matriz é dita *não negativa* se cada uma de suas entradas são números reais não negativos.

Seja $M \in \mathbb{M}_n$. Uma submatriz de M é uma matriz obtida pela remoção de todas as entradas de um número fixado de linhas ou colunas. Uma submatriz é *principal* se ela é obtida pela remoção de um subconjunto de linhas e do seu correspondente subconjunto de colunas. Denotemos por M_{ij} a submatriz de M obtida a partir da exclusão de sua i-ésima linha e de sua j-ésima coluna.

A seguir, apresentamos a expansão de Laplace para o cálculo do determinante de uma matriz no espaço vetorial $\mathbb{M}_n$.

Definição II.1. Dado $M = [m_{ij}] \in \mathbb{M}_n$, o determinante de M é definido, indutivamente, da seguinte forma.

(i) Para $n = 1$, definimos $\det(M) = m_{11}$;

(ii) Para $n > 1$, fixado i, onde $1 \leq i \leq n$, definimos $\det(M) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} m_{ik} \det(M_{ik})$.

Definição II.2. Seja $M \in \mathbb{M}_n$. Um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é um *autovalor* de M se existe um vetor não nulo $v \in \mathbb{M}_{n,1}$ tal que $Mv = \lambda v$. Tal vetor v, quando existir, é denominado *autovetor* de M associado ao autovalor λ.

Alternativamente, podemos definir os autovalores de $M \in \mathbb{M}_n$, como as raízes do *polinômio característico* de M (ou M-polinômio), $p(M, x)$, que é o polinômio mônico de grau n, definido por $p(M, x) = \det(xI - M)$. A *multiplicidade algébrica* de λ é a multiplicidade de λ considerado como uma raiz de seu polinômio característico. A *multiplicidade geométrica* de λ é a dimensão do subespaço gerado pelos autovetores associados à λ. Em geral, a multiplicidade algébrica de λ é maior ou igual à sua multiplicidade geométrica. Os resultados envolvendo a matriz M são denominados M-teoria.

Seja $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ um polinômio com coeficientes reais. Dado $M \in \mathbb{M}_n$ define-se $f(M) = a_0I + a_1M + \cdots + a_nM^n$. O teorema a seguir, conhecido como Teorema de Cayley-Hamilton, afirma que M é uma raiz do polinômio $p(M, M)$.

Teorema II.1. *Se $M \in \mathbb{M}_n$, então $p(M, M) = 0$.*

O polinômio minimal de M, $m(M, x)$, é o polinômio mônico de menor grau tal que $m(M, M) = 0$.

Proposição II.1. *Seja $M \in \mathbb{M}_n$. As seguintes afirmações se verificam:*

(i) $m(M, x)$ é unicamente determinado por M;

(ii) Se $f(x)$ é um polinômio tal que $f(M) = \mathbf{0}$, então $m(M, x)$ divide $f(x)$;

(iii) Se $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p\}$ são os distintos autovalores de M de modo que μ_i tem multiplicidade algébrica m_i, então

$$p(M, x) = \prod_{i=1}^{p}(x - \mu_i)^{m_i} \text{ e } m(M, x) = \prod_{i=1}^{p}(x - \mu_i)^{q_i},$$

onde $0 < q_i \leq m_i$.

Dado $M \in \mathbb{M}_n$, denotamos por M^T a sua matriz transposta e por M^{-1} a sua inversa, quando tal matriz existir. Dizemos que $M \in \mathbb{M}_n$ é uma *matriz ortogonal* se $M^T = M^{-1}$. Quando $M = M^T$, dizemos que M é uma *matriz simétrica*. Dois vetores $x, y \in \mathbb{M}_{n,1}$ são *ortogonais entre si* se $y^Tx = 0$. Um conjunto de vetores $\{x_1, \ldots, x_n\}$ forma um *conjunto ortonormal* se cada par de vetores são ortogonais e $x_i^Tx_i = 1$ para cada i, onde $1 \leq i \leq n$. O teorema a seguir apresenta alguns resultados importantes sobre os autovalores de matrizes simétricas.

Teorema II.2 ([Horn e Johnson, 2013])**.** *Seja $M \in \mathbb{M}_n$ uma matriz simétrica. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) Os autovalores de M são reais;

(ii) As multiplicidades algébrica e geométrica de qualquer autovalor de M são iguais;

(iii) Os autovetores de M podem ser escolhidos de modo que sejam ortogonais entre si. De fato, eles podem ser escolhidos para formar uma base ortonormal do $\mathbb{R}^n$.

Devido ao Teorema II.2, nos referimos à multiplicidade algébrica de um autovalor simplesmente como sua multiplicidade. Uma matriz $M \in \mathbb{M}_n$ é *diagonalizável* se existe uma matriz invertível $S \in \mathbb{M}_n$ tal que $S^{-1}MS$ é uma matriz diagonal. Do Teorema Espectral sabemos que toda matriz simétrica é diagonalizável, e do Teorema II.2, seus autovalores são números reais e portanto, podem ser ordenados. Como usual, indexamos os autovalores de M de forma não crescente, e os denotamos por $\lambda_1(M) \geq \lambda_2(M) \geq \cdots \geq \lambda_n(M)$. O *espectro de* M (ou M*-espectro*) é o multiconjunto formado pelos autovalores de M, denotado por $\text{Spec}(M) = \{\lambda_1^{[s_1]}, \lambda_2^{[s_2]}, \ldots, \lambda_k^{[s_k]}\}$, onde s_i denota a multiplicidade do autovalor $\lambda_i(M)$. O *raio espectral* de M é dado por $\rho(M) = \max\{|\lambda_i(M)|; 1 \leq i \leq n\}$.

Definição II.3. Uma matriz $M \in \mathbb{M}_n$ é dita *positiva semidefinida* se $x^T Mx \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{M}_{n,1}$.

O teorema a seguir fornece uma caracterização das matrizes semidefinidas positivas.

Teorema II.3 ([Horn e Johnson, 2013])**.** *Dada $M \in \mathbb{M}_n$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) M é semidefinida positiva;

(ii) Todos os autovalores de M são não negativos.

O próximo resultado apresenta um condição necessária e suficiente para que uma matriz simétrica seja semidefinida positiva.

Teorema II.4 ([Horn e Johnson, 2013])**.** *Seja $M \in \mathbb{M}_n$ uma matriz simétrica. M é semidefinida positiva se e somente se existe $B \in \mathbb{M}_n$ tal que $M = B^T B$.*

Dado $M \in \mathbb{M}_n$, o *traço* de M, $tr(M)$, é a soma dos elementos da diagonal principal. É um fato bem conhecido que o traço de uma matriz simétrica M é igual a soma de seus autovalores, isto é, $tr(M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(M)$. Além disso, como observado em [Horn e Johnson, 2013], para $a, b \in \mathbb{R}$, o espectro da matriz $N = aM + bI_n$ é dado por

$$\text{Spec}(N) = \{a\lambda_1(M) + b, a\lambda_2(M) + b, \ldots, a\lambda_n(M) + b\}.$$

Duas matrizes $B, C \in \mathbb{M}_n$ são ditas *semelhantes* se existe uma matriz invertível $S \in \mathbb{M}_n$ tal que $B = SCS^{-1}$. O resultado a seguir relaciona os espectros de matrizes semelhantes.

Teorema II.5 ([Horn e Johnson, 2013]). *Se B e C são matrizes semelhantes então elas têm o mesmo espectro.*

A seguir, discutimos alguns resultados envolvendo matrizes em blocos, que são úteis para os capítulos posteriores desta dissertação.

Definição II.4. Uma matriz $M \in \mathbb{M}_n$ é uma *matriz em blocos* se M pode ser escrita da forma

$$M = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1p} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{p1} & B_{p2} & \cdots & B_{pp} \end{bmatrix},$$

onde B_{ij} é uma submatriz de M. As submatrizes B_{ij} de M são chamadas *blocos* de M.

É fácil observar que toda matriz $M \in \mathbb{M}_n$ é uma matriz em blocos se considerarmos os blocos como submatrizes de ordem 1. Assim, para uma matriz em blocos, temos alguns resultados mencionados a seguir.

Uma matriz quadrada M é *redutível* quando existem uma matriz de permutação Q e matrizes quadradas X e Z tais que

$$Q^T M Q = \begin{bmatrix} X & Y \\ \mathbf{0} & Z \end{bmatrix}.$$

Caso contrário, M é chamada de *matriz irredutível*.

Teorema II.6 ([Horn e Johnson, 2013]). *Se $A, D \in \mathbb{M}_n$, então*

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{cases} \det(A)\det(D - CA^{-1}B), & \text{se } A^{-1} \text{ existe}; \\ \det(D)\det(A - BD^{-1}C), & \text{se } D^{-1} \text{ existe}. \end{cases}$$

As matrizes $D - CA^{-1}B$ e $A - BD^{-1}C$ são chamadas Complemento de Schur de A e B, respectivamente.

Corolário II.7. *Seja $P = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ uma matriz em blocos de ordem n, onde A e C são matrizes quadradas. Desta forma,*

$$\text{Spec}(P) = \text{Spec}(A) \cup \text{Spec}(C).$$

Assumindo a comutatividade dos blocos, valem as identidades a seguir.

Teorema II.8 ([Horn e Johnson, 2013]). *Se $A, B, C, D \in \mathbb{M}_n$, então*

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{cases} \det(AD - CB), & \textit{se } AC = CA; \\ \det(DA - CB), & \textit{se } AB = BA; \\ \det(AD - BC), & \textit{se } DC = CD; \\ \det(DA - BC), & \textit{se } DB = BD. \end{cases}$$

Uma matriz $A \in \mathbb{M}_n$ da forma

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & A_{kk} \end{bmatrix}$$

onde cada $A_{ii} \in \mathbb{M}_{n_i}$, $i = 1, \ldots, k$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, e todos os blocos acima e abaixo dos blocos diagonais são blocos de zeros, é chamada *diagonal em blocos*. É fato que se A é uma matriz diagonal em blocos então $\det(A) = \prod_{i=1}^{k} \det(A_{ii})$.

Teorema II.9 ([Horn e Johnson, 2013]). *Seja M uma matriz simétrica de ordem n definida por*

$$M = \begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \cdots & M_{1,k} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \cdots & M_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k,1} & M_{k,2} & \cdots & M_{k,k} \end{bmatrix},$$

onde $M_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq k$, é uma submatriz de ordem (n_i, n_j) de modo que a soma de cada uma de suas linhas é igual $c_{i,j}$. Se $\overline{M} = [c_{i,j}]_{k,k}$, então os autovalores de $\overline{M}$ são também autovalores de M.

Proposição II.2 ([Nath e Paul, 2014]). *Se $P = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$, então*

$$\text{Spec}(P) = \text{Spec}(A + B) \cup \text{Spec}(A - B).$$

O teorema a seguir, conhecido como Teorema do Entrelaçamento, relaciona os autovalores de uma matriz com os autovalores de suas submatrizes principais.

Teorema II.10 ([Horn e Johnson, 2013]). *Sejam $A \in \mathbb{M}_n$ e $B \in \mathbb{M}_{n-j}$, onde A é uma matriz simétrica e B uma submatriz principal de A. Então $\lambda_{j+1}(A) \leq \lambda_j(B) \leq \lambda_j(A)$, para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n - j\}$.*

O teorema a seguir, conhecido como Teorema de Weyl e So, relaciona os autovalores de uma soma de matrizes.

Teorema II.11 ([Horn e Johnson, 2013]). *Sejam $A, B \in \mathbb{M}_n$ matrizes simétricas de ordem n, e $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Desta forma*

$$\lambda_k(A) + \lambda_n(B) \leq \lambda_k(A + B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_1(B). \tag{II.1}$$

Em ambas as desigualdades, a igualdade se verifica se e somente se existe um vetor não nulo que é autovetor associado à cada um dos autovalores envolvidos.

O teorema a seguir, conhecido como Teorema de Perron-Frobenius, fornece propriedades para o maior autovalor de uma matriz irredutível não negativa.

Teorema II.12 (Teorema de Perron-Frobenius). *Seja $M \in \mathbb{M}_n$ uma matriz irredutível e não negativa, e suponhamos que $n > 2$. Assim,*

(i) $\rho(M) > 0$*;*

(ii) $\rho(M)$ *é um autovalor de* M *e tem multiplicidade igual a 1;*

(iii) Existe um único vetor $x = [x_i]$ *tal que* $x_i > 0\ \forall i$, $Mx = \rho(M)x$ *e* $x_1 + \cdots + x_n = 1$*;*

(iv) Existe um único vetor $y = [y_i]$ *tal que* $y_i > 0\ \forall i$, $y^T M = \rho(M)y^T$ *e* $x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = 1$.

O Teorema de Rayleigh-Ritz, a seguir, caracteriza o maior e o menor autovalores de uma matriz simétrica.

Teorema II.13 ([Horn e Johnson, 2013]). *Se $M \in \mathbb{M}_n$ é uma matriz simétrica, então*

$$\lambda_n(M) = \min_{x^T x = 1} x^T M x \ \text{ e } \ \lambda_1(M) = \max_{x^T x = 1} x^T M x.$$

Agora, lembramos algumas propriedades do produto de Kronecker de matrizes.

Definição II.5. Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_{m,n}$ e $B = [b_{ij}] \in \mathbb{M}_{p,q}$. O produto de Kronecker de A e B, $A \otimes B$, é matriz de ordem (mp, nq) definida por

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \ldots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \ldots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2} & \ldots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$

Por definição, o produto de Kronecker é escrito como uma matriz em blocos, dessa forma, $A \otimes B = [a_{ij}B]$, onde $a_{ij}B$ é o (i, j)-ésimo bloco de $A \otimes B$. Vale ressaltar que, como no produto usual de matrizes, o produto de Kronecker é não comutativo. A seguir apresentamos um resultado envolvendo propriedades do produto de Kronecker.

Teorema II.14 ([Broxson, 2006]). *Sejam $A, B, C \in \mathbb{M}_n$. Desta forma,*

(i) $(\lambda A) \otimes B = \lambda(A \otimes B) = A \otimes (\lambda B)$;

(ii) $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$;

(iii) $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$;

(iv) $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$;

(v) $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$;

(vi) $A \otimes \mathbf{0}_n = \mathbf{0}_n \otimes A = \mathbf{0}_n$;

(vii) $I_n \otimes I_m = I_{nm}$.

Para encerrar esta seção, revisamos os conceitos de produto interno e norma.

Definição II.6. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um *produto interno* sobre V é uma função $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle, \forall u, v, w \in V$;

(ii) $\langle \lambda u, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v \in V$;

(iii) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle, \forall u, v \in V$;

(iv) $\langle u, u\rangle \geq 0, \forall u \in V$, e $\langle u, u\rangle = 0$ se e somente se $u = \mathbf{0}_v$.

Definição II.7. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma *norma* em V é uma função $\|.\| : V \to [0, \infty[$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\|u\| = 0$ se e somente se $u = \mathbf{0}_v$;

(ii) $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in V$;

(iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \forall u, v \in V$.

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com produto interno. A norma $\|.\|$ em relação ao produto interno é a função $\|.\| : V \to [0, \infty[$ dada por $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$.

II.2 Teoria de Grafos

Nesta seção apresentamos alguns conceitos e resultados da Teoria de Grafos que são importantes ao longo desta dissertação que podem ser encontrados em [Balakrishnan e Ranganathan, 2012] e [Merris, 2001].

Definição II.8. Um *grafo* é um par $G = (V(G), E(G))$ ou simplesmente $G = (V, E)$ onde V é um conjunto não vazio e E é um subconjunto de $\{\{u, v\} : u, v \in V\}$. Os elementos de V são chamados *vértices* do grafo G e os elementos de E são denominados *arestas*.

Seja $G = (V, E)$ um grafo. A cardinalidade de V, $|V| = n$, é a *ordem* de G e a cardinalidade de E, $|E| = m$, é o *tamanho* de G. Dados $u, v \in V$, dizemos que u e v são *adjacentes* em G quando $e = \{u, v\} \in E$ e, neste caso, dizemos que e *incide* (ou é *incidente*) em u e em v. Quando um vértice é adjacente a ele mesmo, ou seja $e = \{u, u\} \in E$, dizemos que e é um *laço*. Quando existem duas ou mais arestas com extremos u, v, estas arestas são denominadas *arestas múltiplas*. Um *grafo simples* é livre de laços e arestas múltiplas. Nesta dissertação, todos os grafos tratados são grafos simples. O grafo *completo*, denotado por K_n, é o grafo em que quaisquer dois vértices distintos são adjacentes. Uma *clique* em um grafo é um conjunto de vértices em que todos são adjacentes entre si, dois a dois. Um *conjunto independente* é um subconjunto de V onde não existam dois vértices adjacentes. A *vizinhança aberta* de v, denotada por $N_G(v)$, é o subconjunto de V formado por todos os vértices adjacentes a v e a *vizinhança fechada* de v, $N_G[v]$, é definida por $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. O *grau do vértice* $v \in V$, $d_G(v) = d(v)$, é igual a $|N_G(v)|$. Os *graus mínimo* e *máximo* de G são denotados por $\delta(G) = \min\{d(v)|v \in V\}$ e $\Delta(G) = \max\{d(v)|v \in V\}$, respectivamente. O grau médio de G é dado por $\overline{d}(G) = \frac{1}{n}\sum_{v \in V} d(v)$. Uma aresta é dita aresta pendente quando incide em um vértice de grau 1. Os vértices distintos u e v são chamados *gêmeos verdadeiros* quando $N_G[u] = N_G[v]$ e são ditos *gêmeos falsos* quando não são adjacentes e $N_G(u) = N_G(v)$.

Exemplo II.1. *Na Figura II.1 os vértices v_1 e v_4 são adjacentes. A vizinhança aberta de v_1 é $N_G(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\}$, e assim, $d(v_1) = |N_G(v_1)| = 3$. As vizinhanças fechadas de v_1 e v_4 são iguais a $N_G[v_1] = N_G[v_4] = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, ou seja, v_1 e v_4 são vértices gêmeos verdadeiros, enquanto v_2 e v_3 são vértices gêmeos falsos. O grau mínimo de G é $\delta(G) = 2$, o grau máximo $\Delta(G) = 3$ e o grau médio $\overline{d}(G) = 2.5$.*

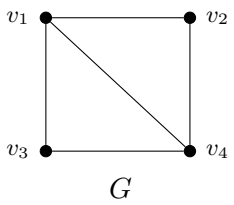


Figura II.1: Grafo com 4 vértices e 5 arestas.

Definição II.9. Sejam $G = (V, E)$ e $H = (W, F)$ grafos. Diz-se que H é um *subgrafo de* G se $W \subseteq V$ e $F \subseteq E$. O subgrafo de G *induzido* por W é $G[W] = (W, E \cap \{\{u, v\} : u, v \in W, u \neq v\})$.

Lema II.1. *Seja G um grafo de tamanho m. Se $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, então*

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m.$$

Demonstração. De fato, cada vértice v_i fornece $d(v_i)$ arestas e como cada aresta contém exatamente dois vértices, o resultado segue. □

Teorema II.15. *Todo grafo G tem um número par de vértices de grau ímpar.*

Demonstração. Seja $G = (V, E)$ um grafo de ordem n e tamanho m com $V = V_1 \cup V_2$, onde V_1 é o conjunto dos vértices de grau ímpar de G e V_2 é o conjunto dos vértices de grau par. Desta forma,

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v) = 2m.$$

Sabemos que $\sum_{v \in V_2} d(v) = 2k, k \in \mathbb{N}$. Desta forma, pela igualdade acima conclui-se que $|V_1| = 2p, p \in \mathbb{N}$, como queríamos demonstrar.

□

Definição II.10. Seja $G = (V, E)$ um grafo. Uma *cadeia* em G, é uma sequência de vértices $\omega = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ tal que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$, onde $1 \leq i \leq k-1$. Dizemos que ω é uma *cadeia fechada* se $v_1 = v_k$. Os vértices v_1 e v_k são ditos extremos da cadeia. Para cada i, $2 \leq i \leq k-1$, diz-se que v_i é um vértice interior de ω, caso contrário v_i é vértice extremo. O comprimento de ω é a quantidade de suas arestas.

Seja $G = (V, E)$ um grafo de ordem n. Dado uma cadeia $\omega = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ em G, diz-se que ω é uma *cadeia simples* se $v_i \neq v_j$, para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, k\}$; ω é um *ciclo*, se é uma cadeia simples e fechada e é um *caminho*, se é uma cadeia simples e aberta. Um grafo de ordem n e tamanho m constituído por apenas um ciclo de comprimento m é chamado de *grafo ciclo, denotado por C_n, e chamado de grafo caminho, denotado por P_n, quando é constituído de apenas um caminho de comprimento $n-1$.* A *distância* de v_i a v_j, denotada por $d(v_i, v_j)$, é o comprimento do menor caminho cujos extremos são v_i e v_j. Um *caminho pendente* em um grafo é um caminho em que um dos extremos tem grau maior que um, o outro tem grau exatamente igual a um, enquanto os vértices interiores tem grau igual a dois.

Definição II.11. Um grafo $G = (V, E)$ de ordem n é dito *conexo* se $n = 1$ ou para quaisquer dois vértices $u, v \in V$ existe um caminho com extremos u e v. Caso contrário, G é dito grafo desconexo. Seja $W \subseteq V$. Uma *componente (conexa)* de G é um subgrafo induzido $H = G[W]$ de modo que H seja conexo e não exista um subconjunto X de V que contenha W propriamente e $G[X]$ seja conexo.

Definição II.12. Um grafo G cujos vértices são todos de mesmo grau r é denominado *regular* de grau r ou r*-regular*.

Exemplo II.2. *Na Figura II.2,* G_1 *é um grafo desconexo pois não existe um caminho entre* v_4 *e qualquer outro vértice, e* G_2 *é um grafo conexo* 2*-regular.*

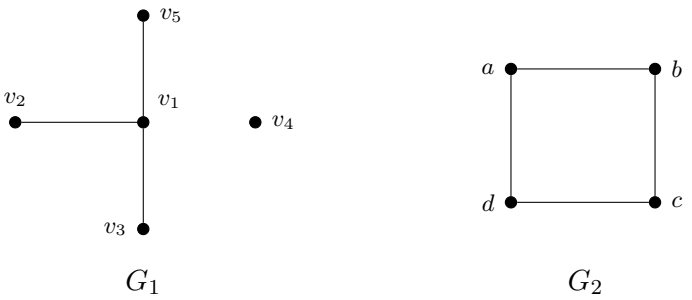


Figura II.2: G_1 desconexo e G_2 conexo.

Do Lema II.1, o tamanho de um grafo r-regular de ordem n é $m = \frac{1}{2}nr$. Um grafo de ordem n que é $(n-1)$-regular é dito *grafo completo* e é denotado por K_n. Um grafo conexo 2-regular é um ciclo.

Definição II.13. Um grafo $G = (V, E)$ é *bipartido* se V pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos, X e Y, tais que vértices adjacentes não pertencem ao mesmo conjunto. As partições X e Y são ditas células de G. Um grafo bipartido é dito *bipartido completo* quando todos os vértices de X são adjacentes a todos os vértices de Y. Um grafo bipartido completo cujas partições têm p e q elementos, respectivamente, é denotado por $K_{p,q}$.

Exemplo II.3. *Na Figura II.3 exibimos os grafos bipartidos completos* $K_{1,4}$ *e* $K_{2,2}$*. Os vértices ilustrados na mesma cor pertencem à mesma partição.*

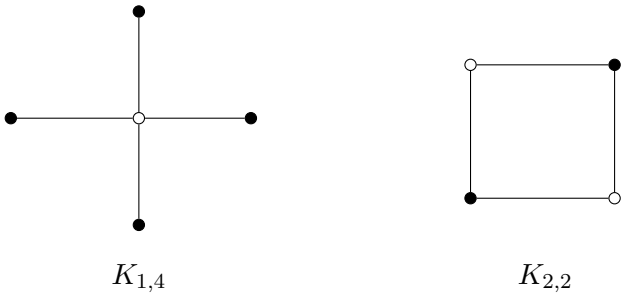


Figura II.3: Grafos bipartidos $K_{1,4}$ e $K_{2,2}$.

Definição II.14. Seja G um grafo. Denotamos por $G - v$, ou simplesmente, $(G)_v$ o grafo obtido de G a partir da remoção de v de seu conjunto de vértices e de todas as arestas que incidem em v.

Exemplo II.4. *Na Figura II.4 vemos um exemplo de grafo e o grafo obtido a partir da remoção de um vértice.*

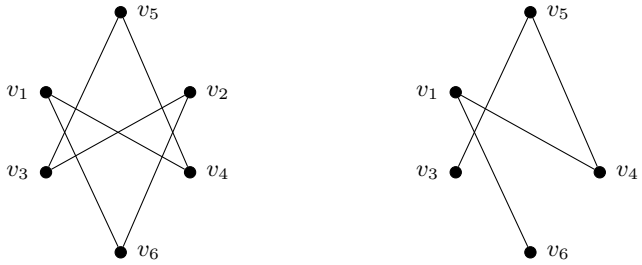


Figura II.4: G e $G - v_2$, respectivamente.

Para finalizar este capítulo, abordamos o conceito de coloração em grafos.

Definição II.15. Seja G um grafo e k um inteiro positivo. Uma *k-coloração* de G é uma função $c : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$. Cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ é uma cor da coloração e k é o número de cores desta coloração de G.

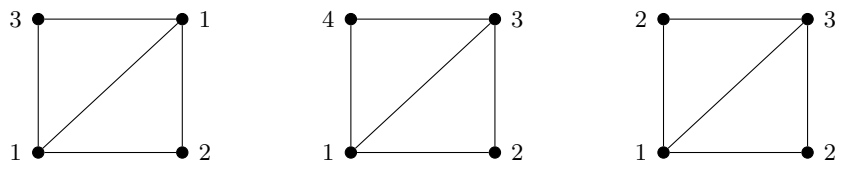
Chamando de V_i a pré-imagem de cada i, vemos que V_i é o conjunto dos vértices que são coloridos com a cor i. Uma *coloração* para G pode ser representada rotulando cada vértice v_j com $c(v_j)$.

Definição II.16. Dizemos que c é uma *k-coloração própria* de G se para todo par de vértices adjacentes u, v de G, $c(u) \neq c(v)$. Neste caso, G é dito *k-colorível*.

Para fazer com que um grafo seja k-colorível, basta atribuir para cada vértice uma cor diferente. A seguir, apresentamos uma definição para o número que representa a quantidade mínima de cores necessárias para uma coloração própria.

Definição II.17. O *número cromático de um grafo* G, denotado por $\chi(G)$, é o menor inteiro positivo k tal que G seja k-colorível. Neste caso, dizemos que esta coloração é mínima para G e que G é *$\chi(G)$-cromático*.

Seja G o grafo da Figura II.5. Vemos três diferentes configurações: a primeira (a) uma 3-coloração, a segunda (b) uma 4-coloração própria e a terceira (c) mostra que o grafo em questão é 3-colorível. O grafo G, na verdade, é 3-cromático. De fato, basta observar que K_3 é um subgrafo de G, ou seja, este grafo não pode ser 2-colorível.



(a) (b) (c)

Figura II.5: Exemplo de k-coloração, k-coloração própria e grafo $\chi(G)$-cromático, respectivamente.

Capítulo III Teoria Espectral de Grafos

Diversas matrizes estão naturalmente associadas a um grafo. Alguns exemplos incluem as matrizes de adjacência, incidência, laplaciana sem sinal, entre outras. Um dos principais desafios da Teoria Espectral de Grafos (TEG) é determinar com precisão se e como as propriedades dos grafos se manifestam nas propriedades algébricas dessas matrizes que os representam. Neste capítulo, apresentamos conceitos e resultados envolvendo as matrizes de adjacência, laplaciana sem sinal e A_α.

III.1 Matriz de adjacência

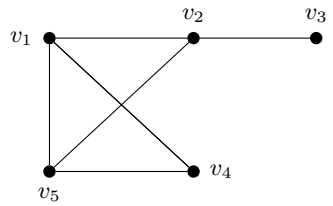
Nesta seção, estudamos a matriz de adjacência de um grafo e dissertamos sobre algumas de suas propriedades estruturais e espectrais. Tais resultados podem ser encontrados em [Godsil e Royle, 2001], [Biggs, 1993] e [Abreu *et al.*, 2007].

Definição III.1. Seja $G = (V, E)$ um grafo de ordem n. Dado $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, a *matriz de adjacência* de G, $A(G) = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_n$, tem entradas dadas por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i \text{ e } v_j \text{ são adjacentes;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja G um grafo de ordem n. Como $A(G)$ é uma matriz real e simétrica, todos os seus autovalores são reais e portanto podem ser ordenados. Os autovalores da matriz de adjacência de G, $\lambda_i(A(G)) = \lambda_i(G), \forall i, 1 \leq i \leq n$ são chamados *autovalores de* G e o polinômio característico de G é definido por $p(G, x) = p(A(G), x)$. O espectro de G, Spec(G), é o espectro de sua matriz de adjacência.

Exemplo III.1. *Seja G o grafo da Figura III.1.*



G

Figura III.1: Grafo de ordem 5 e tamanho 6.

Sua matriz de adjacência é

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

seu polinômio característico é

$$p(G, \lambda) = \lambda^5 - 6\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda + 2,$$

e o seu espectro

$$\text{Spec}(G) = \{2.6412, 0.7237, -0.5892, -1, -1.7757\}.$$

Portanto, $\lambda_1(G) = 2.6412$.

Neste trabalho, quando os autovalores não são inteiros utilizamos aproximações.

Lema III.1. *Seja* $G = (V, E)$ *um grafo de ordem* n *e* $A = A(G)$ *sua matriz de adjacência.* G *é bipartido se e somente se* A *pode ser escrita como*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & R \\ R^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Sejam V_1 e V_2 as células de G com $|V_1| = n_1$ e $|V_2| = n_2$, onde $n = n_1 + n_2$. Rotulando primeiramente os vértices de V_1 e depois os vértices de V_2 e sabendo que vértices da mesma célula não são adjacentes entre si, temos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & R \\ R_2 & 0 \end{bmatrix}$$

onde R tem n_1 linhas e n_2 colunas e R_2 tem n_2 linhas e n_1 colunas. Como a matriz de adjacência é simétrica, temos que $R_2 = R^T$.

Reciprocamente, suponhamos que possamos escrever

$$A = \begin{bmatrix} 0 & R \\ R^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Desta forma, basta fazermos a célula V_1 como os n_1 primeiros vértices e V_2 como os próximos n_2 vértices que concluímos que G é bipartido, e o resultado segue. □

O resultado que é apresentado a seguir é o primeiro exemplo de como é possível obter propriedades estruturais de um grafo analisando propriedades algébricas da matriz de adjacência que o representa.

Proposição III.1 ([Biggs, 1993])**.** *Seja G um grafo de ordem n e tamanho m e seja*

$$p(G, \lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

As afirmações a seguir são válidas:

(i) $a_1 = 0$*;*

(ii) $a_2 = -m$*;*

(iii) $a_3 = -2t$*, onde t é o número de triângulos no grafo.*

Demonstração. Da teoria de matrizes temos que para cada i, $1 \leq i \leq k$, $(-1)^i a_i =$ "soma dos menores principais de $A(G)$ com i linhas e i colunas", onde um menor principal de $A(G)$ com i linhas e i colunas é o determinante de qualquer submatriz principal de $A(G)$, ou seja, uma matriz obtida de $A(G)$ pela retirada de um subconjunto de $n - i$ linhas e do correspondente subconjunto de colunas.

(i) Para o primeiro caso, basta observar que a diagonal de $A(G)$ é formada inteiramente por zeros. Então todos os seus menores principais com 1 linha e 1 coluna são iguais a zero, e daí conclui-se que $a_1 = 0$.

(ii) Para o segundo caso, observamos que qualquer menor principal de $A(G)$ com 2 linhas e 2 colunas que tenha entradas não-nulas é necessariamente da forma $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ pois a matriz é simétrica e a diagonal principal é inteiramente formada de zeros. Desta maneira, vemos que cada menor principal destes vale -1 e existe um deles para cada par de vértices adjacentes. Logo

$$(-1)^2 a_2 = (-1)|E| = (-1)m$$

Portanto, $a_2 = -m$, onde m é o número de arestas de G.

(iii) No último caso, temos 3 possibilidades para menores principais de $A(G)$ com 3 linhas e 3 colunas não todas nulas, a saber $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Destes casos, o único determinante não-nulo é o último, cujo valor é 2. A terceira matriz corresponde a três vértices mutuamente adjacentes (grafo completo com três vértices), ou seja, um triângulo. Assim, $(-1)^3 a_3 = 2t$, onde t é o número de triângulos de G. Portanto, $a_3 = -2t$, o que conclui a demonstração do resultado.

□

Exemplo III.2. *Revisitando o exemplo da Figura III.1, temos que seu polinômio característico é* $p(G, \lambda) = \lambda^5 - 6\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda + 2$*. Assim, comparando com a proposição, vemos que de fato* $a_1 = 0$*,* $a_2 = -6$ *e* $a_3 = -4 = -2 \times 2$*.*

Observação III.1. *As fórmulas para calcular os coeficientes* a_4 *e* a_5 *do polinômio característico de um grafo foram determinadas no artigo [de Moraes et al., 2002]. Neste artigo os autores mostram que tais coeficientes dependem do número de arestas, número de triângulos, quadrados e pentágonos no grafo, além do grau de cada vértice.*

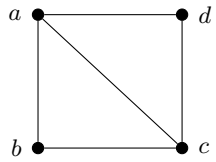
Proposição III.2 ([Godsil e Royle, 2001])**.** *Seja* $G = (V, E)$ *um grafo e* $A = A(G)$ *sua matriz de adjacência. O número de cadeias de comprimento* ℓ *ligando o vértice* v_i *ao vértice* v_j *em* G *é dado pela* (i, j)*-ésima entrada da matriz* A^ℓ*.*

Demonstração. A demonstração será feita por indução em ℓ. Para $\ell = 1$ o resultado é verdadeiro, dado que $A^1 = A$. Agora, suponhamos o resultado verdadeiro para $\ell = L$, ou seja, a quantidade de cadeias de comprimento L ligando v_i à v_j é $[A^L(G)]_{ij}$. Observemos que $A^{L+1} = A^L A$, e assim, calculemos a (i, j)-ésima entrada de A^{L+1}.

$$[A^{L+1}]_{ij} = \begin{bmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + b_{i3}a_{3j} + \cdots + b_{in}a_{nj}$$

Cada b_{ik} representa a quantidade de cadeias de tamanho L ligando v_i à v_k, e cada a_{kj} vale 1 quando v_k é adjacente à v_j, e 0 caso contrário. Desta forma, para cada k, $b_{ik}a_{kj} = b_{ik}$ quando v_k é adjacente à v_j. Mas, se b_{ik} é a quantidade de cadeias de tamanho L com extremos v_i e v_k, e v_k é adjacente à v_j, então b_{ik} é também a quantidade de cadeias de tamanho $L+1$ com extremos v_i e v_j tendo v_k como um vértice interno. Desta forma, a soma $b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + b_{i3}a_{3j} + \cdots + b_{in}a_{nj}$ é a quantidade de cadeias de tamanho $L+1$ com extremos v_i e v_j. E isto conclui a demonstração. □

Exemplo III.3. *Seja G o grafo da Figura III.2.*



G

Figura III.2: Grafo de ordem 4 e tamanho 5.

A matriz de adjacência de G é

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

e, desta forma,

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, estamos analisando quantas cadeias de tamanho 2 existem entre cada par de vértices. Por exemplo, se tomarmos a terceira entrada da primeira linha da matriz A^2, vemos que temos duas possibilidades de partir do vértice a e chegar ao vértice c com uma cadeia de tamanho 2, o que pode ser conferido observando a Figura III.2. É interessante observar as entradas da diagonal principal, pois estes elementos representam quantas cadeias fechadas de tamanho 2 existem para cada vértice. Neste caso, esta quantidade é dada pelo grau do vértice, já que a única maneira de sair de um vértice e voltar para ele em apenas 2 passos num grafo simples é passando pela mesma aresta na ida e na volta.

Corolário III.1 ([Godsil e Royle, 2001])**.** *Seja G um grafo de ordem n e tamanho m com* Spec$(G) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$*. Se T_ℓ é o número total de cadeias fechadas de comprimento ℓ em G, então $T_\ell = tr(A^\ell)$, isto é, $T_\ell = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\ell$. Em particular:*

(i) a soma dos quadrados dos autovalores é duas vezes o número de arestas, ou seja, $tr(A^2) = 2m$;

(ii) se G é um grafo r-regular, então $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = rn$;

(iii) a soma dos cubos dos autovalores é seis vezes o número t de triângulos, ou seja, $tr(A^3) = 6t$.

Demonstração. Os elementos da diagonal principal de A^ℓ representam a quantidade de cadeias fechadas de tamanho ℓ para cada vértice. Desta forma, o número total de cadeias fechadas de tamanho ℓ é $T_\ell = tr(A^\ell)$. Agora, da Teoria de Matrizes, sabemos que se λ é um autovalor de A, então λ^ℓ é um autovalor de A^ℓ. Mais ainda, sabemos que $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, e assim, concluímos que $T_\ell = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\ell$.

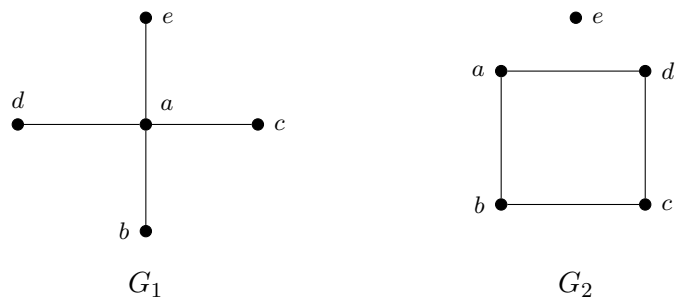
(i) Neste caso, basta observar que a única maneira de sair de um vértice e voltar para ele mesmo em apenas 2 passos é passando duas vezes pela mesma aresta. Assim, é fácil ver que cada entrada da diagonal principal de A^2 é o grau de cada vértice correspondente e assim, $tr(A^2) = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2|E| = 2m$.

(ii) Do segundo item temos que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = 2m$. Mas como $2m = \sum_{i=1}^{n} d(v_i)$ e num grafo r-regular $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = rn$, concluímos que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = rn$.

(iii) Como sabemos, as entradas da diagonal principal de A^3 são as cadeias fechadas de tamanho 3 no grafo, e essas cadeias representam triângulos. Mas, cada triângulo tem duas maneiras de ser percorrido partindo de um mesmo vértice, e de cada triângulo fazem parte três vértices. Desta forma, conclui-se que $tr(A^3) = 2 \times 3 \times t = 6t$.

□

Conhecendo o espectro de um grafo, temos determinado o seu número de vértices, de arestas e triângulos. Mas, não podemos generalizar o resultado sobre ciclos, pois nem sempre os ciclos de comprimento r, com $r \geq 4$, são determinados em função de $tr(A^r)$. Podemos observar este fato na Figura III.3, que apresenta dois grafos com o mesmo polinômio característico, $p(G_1, \lambda) = p(G_2, \lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^3$, sendo que o grafo da direita tem um ciclo de comprimento 4 e o outro não possui ciclos.



G_1 G_2

Figura III.3: Grafos com o mesmo polinômio característico.

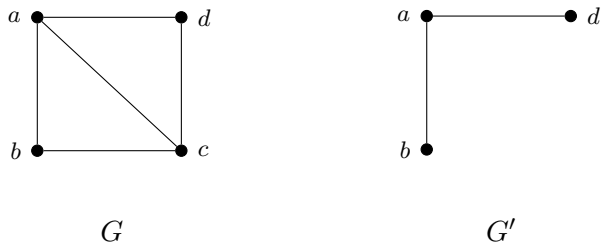
Isto se deve ao fato de cadeias permitirem repetições de vértices e arestas. Pensando de maneira geral, se tivermos dois vértices u e v, adjacentes em G, temos a cadeia $\omega = (u, v, u, v, u)$ de tamanho 4.

O próximo teorema a ser apresentado é conhecido como teorema de entrelaçamento para matriz de adjacência, e dá uma relação entre os autovalores de um grafo e os autovalores do grafo obtido a partir da remoção de um vértice do grafo original. A prova é consequência do teorema do entrelaçamento para matrizes (Teorema II.10).

Teorema III.2 ([Godsil e Royle, 2001])**.** *Sejam $G = (V, E)$ e $v_i \in V$. Se $G' = G - v_i$, então $\lambda_{j+1}(G) \leq \lambda_j(G') \leq \lambda_j(G)$, para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.*

Demonstração. Basta observar que retirar um vértice v_i do grafo G é equivalente a retirar a i-ésima linha e a i-ésima coluna da matriz de adjacência de G, e então aplicamos o Teorema II.10. □

Exemplo III.4. *Na Figura III.4, sejam G e $G' = G - c$ dois grafos.*



G $\qquad\qquad$ G'

Figura III.4: G e $G' = G - c$.

O polinômio característico de G é $p(G, \lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^2 - 4\lambda$ e seu espectro Spec$(G) = \{2.56, 0, -1, -1.56\}$.
O polinômio característico de G' é $p(G', \lambda) = \lambda^3 - 2\lambda$ e seu espectro Spec$(G') = \{1.41, 0, -1.41\}$.

- $\lambda_2(G) = 0 < \lambda_1(G') = 1,41 < \lambda_1(G) = 2,56.$
- $\lambda_3(G) = -1 < \lambda_2(G') = 0 = \lambda_2(G) = 0.$
- $\lambda_4(G) = -1,56 < \lambda_3(G') = -1,41 < \lambda_3(G) = -1.$

Como podemos ver, o teorema é verificado.

III.1.1 O espectro de certas classes de grafos

A determinação direta e teórica do espectro de grafos pode ser notavelmente complexa de acordo com a ordem dos grafos, e ocasionalmente produz resultados de difícil manipulação. Existem resultados que estabelecem o espectro de grafos derivados de outros através de operações

como união, *join*, entre outras. Além disso, alguns resultados oferecem apenas informações sobre determinados autovalores, enquanto certos teoremas conduzem diretamente ao espectro de grafos de tipos especiais, empregando artifícios de prova específicos. Em geral, possuímos conhecimento sobre os espectros apenas em relação a algumas classes restritas de grafos. Nesta seção, apresentamos alguns resultados acerca deste tópico.

Proposição III.3 ([Harary, 1969])**.** *Sejam G um grafo e u, v um par de vértices gêmeos em G.*

(i) Se u e v são vértices gêmeos verdadeiros então $-1 \in$ Spec(G);

(ii) Se u e v são vértices gêmeos falsos então $0 \in$ Spec(G).

Demonstração. Seja $[f_n]_{i,j}$ um vetor de ordem n de modo que a i-ésima entrada seja igual a 1, a j-ésima entrada igual a -1, e as demais entradas iguais a 0.

(i) Se v_i e v_j são vértices gêmeos verdadeiros, $A[f_n]_{i,j} = -1[f_n]_{i,j}$, pois $[A[f_n]_{i,j}]_i = 1$, $[A[f_n]_{i,j}]_j = -1$ e $[A[f_n]_{i,j}]_k = 0$ para $k \neq i$ e $k \neq j$.

(ii) Se v_i e v_j são vértices gêmeos falsos, $[A[f_n]_{i,j}]_i = 0 \cdot 1$, $[A[f_n]_{i,j}]_j = 0 \cdot -1$ e $[A[f_n]_{i,j}]_k = 0 \cdot 0$ para $k \neq i$ e $k \neq j$.

□

Proposição III.4. *Para o grafo completo K_n temos* Spec$(K_n) = \{(-1)^{[n-1]}, n-1\}$. *Em particular, $p(K_n, \lambda) = (\lambda - n + 1)(\lambda + 1)^{(n-1)}$.*

Demonstração. Como K_n possui $n-1$ pares de vértices gêmeos verdadeiros, conclui-se pela Proposição III.3 que $-1 \in$ Spec(K_n) com multiplicidade $n-1$. Além disso, como a soma de cada linha de $A(K_n)$ é igual a $n-1$, podemos aplicar o Teorema II.9, onde M é a matriz de ordem 1 com $M_{1,1} = n-1$. Portanto, Spec$(K_n) = \{(-1)^{[n-1]}, n-1\}$. □

Proposição III.5. *Para o grafo bipartido completo $K_{p,q}$ tem-se* Spec$(K_{p,q}) = \{(\pm\sqrt{pq}), 0^{[p+q-2]}\}$.

Demonstração. Como $K_{p,q}$ tem $p-1$ pares de vértices gêmeos falsos de grau q e $q-1$ pares de vértices gêmeos falsos de grau p, conclui-se pela Proposição III.3 que $0 \in$ Spec$(K_{p,q})$ com multiplicidade $p-1+q-1 = p+q-2$. Do Lema III.1, podemos escrever $A(K_{p,q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & R \\ R^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}$. Mas, como a soma das linhas de R e R^T são, respectivamente, p e q, podemos usar o Teorema II.9 e obtemos $M = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & p \\ q & \mathbf{0} \end{bmatrix}$. Portanto, Spec$(K_{p,q}) = \{(\pm\sqrt{pq}), 0^{[p+q-2]}\}$. □

Definição III.2. Sejam $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ dois grafos com $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. A *união* de G_1 e G_2 é o grafo $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$. Para qualquer grafo conexo G, escrevemos kG para indicar o grafo que é a união de k cópias de G.

Se G é de ordem n_1 e tamanho m_1, e H é de ordem n_2 e tamanho m_2 então $G \cup H$ tem $n_1 + n_2$ vértices e $m_1 + m_2$ arestas. Além disso, $d_{G\cup H}(v) = d_G(v)$ e $d_{G\cup H} = d_H(u)$ para todo $v \in V(G)$ e $u \in V(H)$.

Proposição III.6. *Dados os grafos G_i com $1 \leq i \leq k$, se G é a união dos grafos $G_1, G_2, \ldots, G_k$ então*

$$p(G, \lambda) = p(G_1, \lambda)p(G_2, \lambda) \ldots p(G_k, \lambda).$$

Demonstração. Seja A_i a matriz de adjacência de G_i, onde $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Podemos organizar a matriz de adjacência de G da seguinte forma

$$A(G) = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & A_k \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$p(G, x) = \det(\lambda I - A(G)) = \det \begin{bmatrix} \lambda I - A_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda I - A_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \lambda I - A_k \end{bmatrix}.$$

Logo, $\lambda I - A(G)$ é uma matriz diagonal em blocos e portanto $p(G, \lambda) = p(G_1, \lambda)p(G_2, \lambda) \ldots p(G_k, \lambda)$.

□

Definição III.3. Sejam G e H grafos tais que $V(G) \cap V(H) = \emptyset$. O *join* de G e H, denotado por $G \vee H$, é o grafo com conjunto de vértices $V(G \vee H) = V(G) \cup V(H)$, e conjunto de arestas $E(G \vee H) = E(G) \cup E(H) \cup \{\{u, v\} : u \in V(G) \text{ e } v \in V(H)\}$.

Exemplo III.5. *A Figura III.5 ilustra o grafo obtido do join entre P_3 e P_2.*

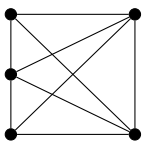


Figura III.5: $P_3 \vee P_2$.

Se G é de ordem n_1 e tamanho m_1 e H é de ordem n_2 e tamanho m_2, então $G \vee H$ tem $n_1 + n_2$ vértices e $m_1 + m_2 + n_1 n_2$ arestas. Além disso, $d_{G\vee H}(v) = d_G(v) + n_2$ e $d_{G\vee H}(u) = d_H(u) + n_1$ para todo $v \in V(G)$ e $u \in V(H)$.

Teorema III.3. *Sejam G e H grafos de ordem n_1 e n_2, respectivamente. Se x e y são vetores não nulos tais que x é ortogonal ao vetor J_{1,n_1}, y é ortogonal ao vetor J_{1,n_2} tais que $A(G)x = \lambda x$ e $A(H)y = \mu y$ para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, então λ e μ são autovalores de $A(G \vee H)$.*

Demonstração. Rotulando os vértices de $G \vee H$ de modo que os vértices de G sejam os primeiros e os vértices de H sejam os últimos, podemos escrever

$$A(G \vee H) = \begin{bmatrix} A(G) & J_{n_1,n_2} \\ J_{n_2,n_1} & A(H) \end{bmatrix}.$$

Agora, seja $X = [x^T, \mathbf{0}]$ o vetor de ordem $n_1 + n_2$ cujas n_1 primeiras entradas são as entradas de x e as demais entradas são nulas. Desta forma,

$$A(G \vee H)X = \begin{bmatrix} A(G)x \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \lambda X.$$

De maneira similar, seja $Y = [\mathbf{0}, y^T]$ o vetor de ordem $n_1 + n_2$ cujas n_1 primeiras entradas são nulas e as demais entradas iguais às entradas de y. Desta forma,

$$A(G \vee H)Y = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ A(H)y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mu y \end{bmatrix} = \mu Y,$$

e o resultado segue. □

A próxima proposição mostra como os autovalores de um grafo regular podem se relacionar com a sua estrutura.

Proposição III.7. *Se G é um grafo r-regular, então*

(i) r é um autovalor de G;

(ii) G é conexo se e somente se a multiplicidade de r é 1;

(iii) qualquer autovalor λ de G satisfaz $|\lambda| \leq r$.

Demonstração. (i) Seja $J_{1,n} = \mathbf{1}$. Sabemos que a soma das entradas de cada linha da matriz de adjacência $A = A(G)$ é igual ao grau do vértice correspondente, e como o grafo é regular de grau r, então a soma de cada linha é igual a r. Desta forma, temos que $A\mathbf{1} = r\mathbf{1}$, ou seja, r é autovalor de G.

(ii) Seja $x = [x_1 x_2 \dots x_n]^T$ um autovetor associado ao autovalor r de G ($Ax = rx$). Suponhamos que x_j é uma entrada de x com valor absoluto máximo. Assim, temos que $[Ax]_j = \sum x_i$, onde

o somatório é considerado sobre os r vértices v_i que são adjacentes a v_j. Logo $\sum x_i = rx_j$. Daí, temos que para cada l tal que v_l é adjacente a v_j,

$$r|x_j| = |x_j| + (r-1)|x_j| = |\sum x_i| \leq \sum |x_i| \leq |x_l| + (r-1)|x_j|.$$

Isto nos fornece $|x_j| \leq |x_l|$ e, portanto, $x_l = x_j$ para todos estes r vértices. Como G é conexo, podemos prosseguir sucessivamente desta maneira até mostrar que todas as entradas de x são iguais. Então x é múltiplo de **1** e o autoespaço associado ao autovalor r tem dimensão 1.

Reciprocamente, suponhamos que r possua multiplicidade 1. Agora, suponhamos por absurdo que G seja desconexo e tomemos $G_1, G_2, \ldots, G_m$ as componentes conexas de G. Como cada uma é um grafo conexo r-regular, então r é um autovalor de multiplicidade 1 para cada G_i. Pela Proposição III.6 $p(G, \lambda) = p(G_1, \lambda)p(G_2, \lambda)\ldots p(G_m, \lambda)$, desta forma, r é um autovalor de G com multiplicidade m, contrariando a hipótese. Logo, G é conexo.

(iii) Seja y um autovetor não nulo de G associado a um autovalor λ de G e seja y_j uma entrada de y com valor absoluto máximo. Como em (ii), temos $\sum y_i = \lambda y_j$ e $|\lambda||y_j| = |\sum y_i| \leq r|y_j|$. Logo $|\lambda| \leq r$.

□

De maneira geral, não conhecemos todo o espectro de um grafo r-regular. Mas, conhecendo seus autovalores, podemos determinar os autovalores do seu grafo complementar, o que pode ser visto na Proposição III.8. A seguir, apresentamos a definição de grafo complementar.

Definição III.4. O grafo complementar de um grafo $G = (V, E)$ é o grafo $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$, onde $\overline{V} = V$ e $\{v_i, v_j\} \in \overline{E}$ quando $\{v_i, v_j\} \notin E$.

É fácil verificar que conhecendo a matriz de adjacência de um grafo de ordem n, a matriz de seu complementar é dada por $A(\overline{G}) = J - I - A(G)$, onde I é a matriz identidade e J é a matriz quadrada de ordem n em que todas as entradas são iguais a 1.

Exemplo III.6. *Na Figura III.6 exibimos um grafo G e o seu grafo complementar $\overline{G}$.*

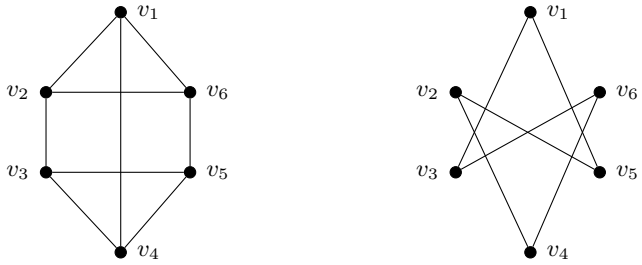


Figura III.6: G e $\overline{G}$, respectivamente.

A matriz de adjacência de G é

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

e a matriz de adjacência de $\overline{G}$ é

$$A(\overline{G}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Desta forma, verificamos que $A(\overline{G}) = J - I - A(G)$.

Proposição III.8 ([Godsil e Royle, 2001])**.** *Seja G um grafo k-regular com n vértices e autovalores $k, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$. Então G e seu complementar $\overline{G}$ possuem os mesmo autovetores e os autovalores de $\overline{G}$ são $n-k-1, -1-\lambda_2, -1-\lambda_3, \ldots, -1-\lambda_n$.*

Demonstração. Sabemos que $A(\overline{G}) = J - I - A(G)$. Seja $\mathbf{1} = J_{1,n}$ e $\{\mathbf{1}, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ortogonal de autovetores de $A(G)$ associados, respectivamente, aos autovalores $k, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Como $A(G)\mathbf{1} = k\mathbf{1}$ então

$$A(\overline{G})\mathbf{1} = (J - I - A(G))\mathbf{1} = (n-k-1)\mathbf{1},$$

pois como o grafo é k-regular, o grau de cada vértice no complementar é $n-k-1$. Portanto, **1** é

autovetor de $\overline{G}$ associado ao autovalor $n-k-1$. Além disso, para cada i, $2 \leq i \leq n$,

$$A(\overline{G})u_i = (J - I - A(G))u_i = -u_i - \lambda_i u_i = (-1 - \lambda_i)u_i,$$

pois como escolhemos uma base de autovetores de $A(G)$ e a matriz de adjacência é simétrica, segue que qualquer par de autovetores é ortogonal, e como **1** faz parte dessa base, Ju_i é a matriz nula. E com isto, obtemos que u_i é autovetor de $\overline{G}$ associado ao autovalor $-1-\lambda_i$

□

Exemplo III.7. *Se G é o grafo formado pela união de s cópias de K_2 então G é 1-regular e tem $2s$ vértices. Pela Proposição III.4, $p(K_2, \lambda) = \lambda^2 - 1$, e pela Proposição III.6, $p(G, \lambda) = (\lambda^2-1)^s$. Logo,* Spec$(G) = \{(1)^{[s]}, (-1)^{[s]}\}$. *O grafo complementar de G é chamado de hiperoctaedro ou cocktail party graph e denotado por H_s. Assim, pela Proposição III.8, temos que* Spec$(\overline{G})$ = Spec$(H_s) = \{2s-2, (0)^{[s]}, (-2)^{[s-1]}\}$.

III.1.2 Isomorfismo de grafos e invariantes

Os resultados desta subseção podem ser encontrados em [Merris, 2001].

Definição III.5. Dizemos que dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ são isomorfos quando existe uma função bijetora f entre V_1 e V_2 tal que $\{u, v\} \in E_1$ se e somente se $\{f(u), f(v)\} \in E_2$.

Exemplo III.8. *Um exemplo bastante recorrente no estudo da Teoria de Grafos é o grafo de Petersen, que pode ser visto desenhado de duas maneiras diferentes na Figura III.7. Seja G_1 o grafo da esquerda e G_2 o da direita. Para conferir que os grafos são isomorfos, basta definir $f : V(G_1) \to V(G_2)$ como $f(v_i) = v_i$. Comparando cuidadosamente as figuras, e verificando que todas as adjacências são preservadas, confirmamos que f é um isomorfismo.*

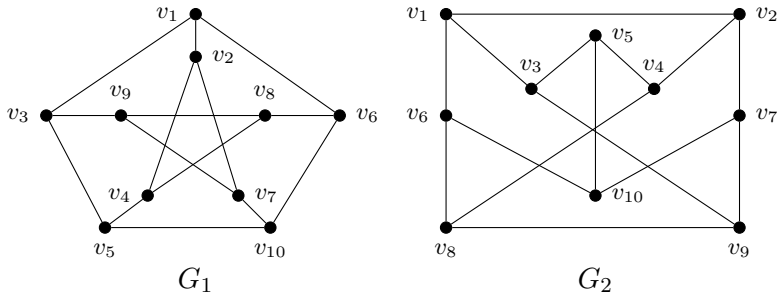


Figura III.7: Duas visualizações do grafo de Petersen.

Agora, estudamos alguns resultados e conceitos acerca da estrutura de grafos isomorfos. Mas, antes de prosseguir, enunciamos a próxima proposição, que mostra que o isomorfismo entre grafos é uma relação de equivalência, ou seja, é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva.

Proposição III.9 ([Merris, 2001]). *Sejam G_1, G_2 e G_3 grafos de ordem n, então*

(i) Todo grafo é isomorfo a si mesmo;

(ii) Se G_1 é isomorfo à G_2, então G_2 é isomorfo à G_1;

(iii) Se G_1 é isomorfo à G_2 e G_2 é isomorfo à G_3, então G_1 é isomorfo à G_3.

Demonstração. (i) Se v_i, $1 \leq i \leq n$ é um vértice de G, basta definir $f(v_i) = v_i$, pois desta forma se v_k e v_l são adjacentes, $f(v_k) = v_k$ e $f(v_l) = v_l$ também são. Assim, conclui-se que todo grafo é isomorfo a si mesmo.

(ii) Se G_1 é isomorfo à G_2, então existe uma função bijetora f entre V_1 e V_2 tal que $\{u, v\} \in E_1$ se e somente se $\{f(u), f(v)\} \in E_2$. Desta forma, basta construir $g : V(G_2) \to V(G_1)$ como $g(f(v_i)) = v_i$.

(iii) Seja f_1 o isomorfismo entre G_1 e G_2, e f_2 o isomorfismo entre G_2 e G_3. Então, se $v_i \in G_1$, basta definir $f_3 : V(G_1) \to V(G_3)$ como $f_3(v_i) = f_2(f_1(v_i))$, e com isto conclui-se a demonstração, pois f_1 e f_2 são isomorfismos.

□

A partir da Proposição III.9, vemos que $f : V(G_1) \to V(G_2)$ é um isomorfismo de G_1 para G_2 se e somente se $f^{-1} : V(G_2) \to V(G_1)$ é um isomorfismo de G_2 para G_1. Em outras palavras, G_1 é isomorfo a G_2 se e somente se G_2 é isomorfo à G_1. Escrevemos $G_1 \simeq G_2$ para indicar que dois grafos são isomorfos. Evidentemente, grafos isomorfos tem o mesmo número de vértices e arestas. Propriedades como esta, que grafos isomorfos compartilham, são denominadas invariantes.

Definição III.6. Seja G um grafo. A sequência de graus de G, denotada por $d(G) = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, é a sequência não crescente dos graus dos vértices de G.

Exemplo III.9. *Seja G o grafo da Figura III.8. Temos $d(G) = (3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$.*

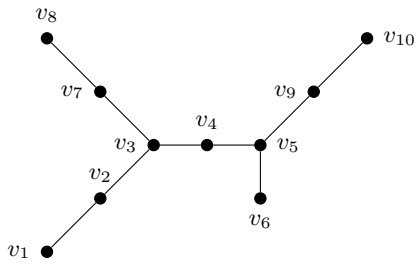


Figura III.8: Grafo de ordem 10.

Teorema III.4 ([Merris, 2001]). *Grafos isomorfos têm a mesma sequência de graus, ou seja, a sequência de graus é um invariante.*

Demonstração. Sejam G e H dois grafos isomorfos. Se $u \in V(G)$, então $d_G(u) = |N_G(u)|$. Suponhamos que $f : V(G) \to V(H)$ seja um isomorfismo. Então f é bijetora e $\{u, v\} \in E(G)$ se e somente se $\{f(u), f(v)\} \in E(H)$. E daí segue que

$$d_G(u) = d_H(f(u)).$$

Assim, f induz uma correspondência biunívoca entre a sequência de graus dos vértices de G e a sequência dos graus dos vértices de H. □

A demonstração deste teorema nos mostra que isomorfismos preservam os graus vértice a vértice. Em outras palavras, nenhum isomorfismo pode levar um vértice de grau 2 para um vértice de grau 1 ou 3, por exemplo. Mas é importante ressaltar que mesmo que dois grafos possuam a mesma sequência de vértices, não necessariamente são isomorfos, como vemos no exemplo a seguir.



Figura III.9: Grafos não isomorfos, mas com a mesma sequência de graus.

Exemplo III.10. *Os grafos ilustrados na Figura III.9 não são isomorfos pois um é conexo e o outro desconexo, mas têm a mesma sequência de graus* $d(G) = (2, 2, 2, 1, 1)$.

Após o estudo deste exemplo, podemos nos perguntar: a quantidade de componentes conexas pode ser um invariante? A resposta está no próximo teorema.

Teorema III.5 ([Merris, 2001])**.** *O número de componentes conexas de um grafo é um invariante.*

Demonstração. Suponhamos que $G = (V, E)$ e $H = (W, F)$ são grafos isomorfos e seja $f : V \to W$ um isomorfismo. Se $(v_0, v_1, \ldots, v_r)$ é um caminho em G de $u = v_0$ até $w = v_r$, então $(f(v_0), f(v_1), \ldots, f(v_r))$ é um caminho em H de $f(u)$ até $f(w)$. Portanto, u e w estão na mesma componente conexa de G se e somente se $f(u)$ e $f(w)$ estão na mesma componente de H. □

Antes de apresentarmos o Teorema III.6, que é utilizado para relacionar o polinômio característico de grafos isomorfos, introduzimos uma definição e um exemplo.

Definição III.7. Uma matriz de ordem n tal que suas entradas são 0 ou 1 é uma *matriz de permutação* se tem uma entrada igual a 1 em cada linha e em cada coluna, isto é, se contém exatamente n uns, onde dois não podem estar na mesma linha ou coluna.

Definição III.8. Uma *permutação* de V é uma função bijetora $f : V \to V$

Exemplo III.11. *Sejam G_1 e G_2 os grafos isomorfos da Figura III.10.*



G_1 G_2

Figura III.10: Grafos isomorfos.

Suas matrizes de adjacência são

$$A(G_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } A(G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Seja $f : V(G_1) \to V(G_2)$ o isomorfismo definido por $f(1) = d$, $f(2) = a$, $f(3) = b$ e $f(4) = c$. A matriz de permutação correspondente é definida por $P(f) = [\delta_{if(j)}]$, onde

$$\delta_{if(j)} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = f(j); \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Esta matriz é também chamada de delta de Kronecker. Note que

$$P(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é a matriz obtida pela permutação das linhas da matriz identidade I_4 de acordo com a permutação f. A conexão entre $A(G_1)$ e $A(G_2)$ é dada por

$$A(G_1) = P(f)^{-1} A(G_2) P(f),$$

o que pode ser provado mostrando que $P(f)A(G_1) = A(G_2)P(f)$.

O próximo teorema caracteriza o isomorfismo entre dois grafos em termos de semelhança de matrizes.

Teorema III.6 ([Merris, 2001]). *G_1 e G_2 são isomorfos se e somente se existe uma matriz de permutação P tal que*

$$A(G_1) = P^{-1}A(G_2)P. \tag{III.1}$$

Demonstração. Sabemos que G_1 e G_2 são grafos isomorfos. Logo, como a quantidade de vértices é um invariante, assumimos que G_1 e G_2 tem ordem n. Sem perda de generalidade, suponhamos que $V(G_1) = V(G_2) = V = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Sejam $A(G_1) = [a_{ij}]$ e $A(G_2) = [b_{ij}]$. Como $G_1 \simeq G_2$, existe uma permutação f de V em V tal que $\{i, j\} \in E(G_1)$ se e somente se $\{f(i), f(j)\} \in E(G_2)$. Logo $a_{ij} = b_{f(i)f(j)}$, $1 \leq i, j \leq n$. Seja $P = P(f) = \delta_{if(j)}$. Então a (i, j)-ésima entrada de P^{-1} é $\delta_{jf(i)}$, a (j, i)-ésima entrada de P. Da definição de multiplicação de matrizes, a (i, j)-ésima entrada de $P^{-1}A(G_2)P = [c_{ij}]$, é dada por

$$c_{ij} = \sum_{s,t=1}^{n} \delta_{sf(i)} b_{st} \delta_{tf(j)} = b_{f(i)f(j)} = a_{ij}.$$

Portanto, $P^{-1}A(G_2)P = A(G_1)$

Reciprocamente, seja P uma matriz de permutação que satisfaça a equação (III.1). Defina $f(j)$ como o índice da linha do único 1 na coluna j de P, $1 \leq j \leq n$. Como P é uma matriz de permutação, $f : V \to V$ é bijetora. Na verdade, $P = P(f)$. Da definição de $A(G_1)$, $\{i, j\} \in E(G_1)$ se e somente se $a_{ij} = 1$. Da equação (III.1), $a_{ij} = 1$ se e somente se $1 = [P^{-1}A(G_2)P]_{ij} = b_{f(i)f(j)}$, se e somente se $\{f(i), f(j)\} \in E(G_2)$, o que prova que f é um isomorfismo entre G_1 e G_2. □

Sabemos da Teoria de Matrizes que duas matrizes de ordem n com entradas reais e simétricas são semelhantes se e somente se têm o mesmo polinômio característico. Assim, através do Teorema III.6, prova-se que o polinômio característico da matriz de adjacência é um invariante. Isto é, se G_1 e G_2 são isomorfos, então

$$det(xI_n - A(G_1)) = det(xI_n - A(G_2)).$$

A partir do Teorema III.6, podemos fazer a seguinte pergunta: é possível dois grafos terem suas matrizes de adjacência semelhantes sem que sejam semelhantes por permutação? A resposta é sim, como podemos ver no exemplo a seguir.

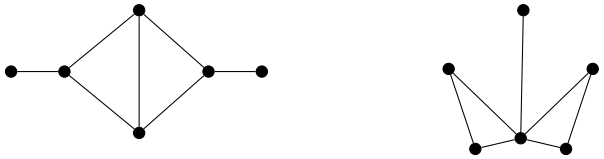
Exemplo III.12. *Se G_1 e G_2 são os grafos da Figura III.3, já vimos que os dois possuem o mesmo polinômio característico, e portanto, suas matrizes de adjacência são semelhantes. Mas como também foi visto, esses grafos não são isomorfos, e portanto, suas matrizes de adjacência não podem ser semelhantes por permutação.*

Como vimos até o momento, podemos afirmar que G_1 e G_2 são isomorfos quando podemos obter um do outro através de uma permutação de seus vértices. Agora são apresentados alguns resultados acerca de grafos que compartilham o mesmo espectro.

Definição III.9. G_1 e G_2 são ditos grafos *coespetrais* quando têm os mesmos autovalores com as mesmas multiplicidades, isto é, quando Spec$(G_1) =$ Spec(G_2).

Se dois grafos são isomorfos, eles têm o mesmo espectro. A recíproca dessa afirmação em geral não é verdadeira, o que pode ser visto no exemplo a seguir.

Exemplo III.13. *Sejam G_1 e G_2 os grafos da Figura III.11.*



G_1 G_2

Figura III.11: Grafos co-espetrais não isomorfos.

Os grafos G_1 e G_2 são coespectrais com polinômio característico

$$p(G_1, \lambda) = p(G_2, \lambda) = \lambda^6 - 7\lambda^4 - 4\lambda^3 + 7\lambda^2 + 4\lambda - 1$$

mas não são isomorfos, visto que G_2 tem um vértice de grau 5, e em G_1, o grau máximo é 3, e como sabemos, se dois grafos são isomorfos, eles devem ter a mesma sequência de graus.

Definição III.10. Dizemos que um grafo G é caracterizado pelo seu espectro se os grafos co-espectrais com G são isomorfos a G.

O fato de existirem grafos coespectrais não isomorfos significa que algumas de suas propriedades não podem ser caracterizadas pelo seu espectro. A conexidade e a existência de ciclos de comprimento 4, por exemplo, são propriedades de grafos que não dependem do espectro, como vimos na Figura III.3. O grau dos vértices é outra propriedade que também não pode ser caracterizada pelo espectro.

Proposição III.10 ([Merris, 2001])**.** *Um grafo G possui um único autovalor se e somente se G é um grafo sem arestas.*

Demonstração. Suponhamos que G possua um único autovalor com multiplicidade k. Como o traço da matriz de adjacência de G é zero, então $\lambda = 0$. Desta maneira, o polinômio mínimo de $A(G)$ é $h(x) = x - \lambda = x$, e assim

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, G possui k vértices isolados.

Reciprocamente, se G não possui arestas e tem k vértices, então $A(G)$ é igual a matriz nula, e assim, $p(G, \lambda) = \lambda^k$. Ou seja, 0 é o único autovalor e tem multiplicidade k. □

Como consequência da Proposição III.10 temos o seguinte corolário.

Corolário III.7 ([Merris, 2001])**.** *Grafos sem arestas são caracterizados pelo seu espectro.*

III.2 Matriz laplaciana sem sinal

Nesta seção, estudamos algumas propriedades espectrais da matriz laplaciana sem sinal. Os resultados abordados nesta seção podem ser consultados em [Cvetković, 2010]. Mas antes de dar início aos estudos desta matriz, fazemos uma subseção sobre a matriz de incidência.

III.2.1 Matriz de Incidência

A matriz de incidência de um grafo fornece uma descrição das relações de incidência das arestas nos vértices do grafo. Ela tem grande importância teórica, pois algumas de suas propriedades são auxiliares na demonstração de resultados sobre a matriz laplaciana sem sinal. O mesmo pode ser observado com relação à utilização da matriz de incidência na obtenção de propriedades do grafo linha de um grafo, como vemos ainda nesta seção.

Definição III.11. A *matriz de incidência* de um grafo G de ordem n e tamanho m, denotada por $B(G) = [b_{ij}]$, é a matriz de ordem (n, m) cujas entradas são

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } e_j \text{ é uma aresta incidente no vértice } v_i; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo III.14. *Seja G o grafo da Figura III.12.*

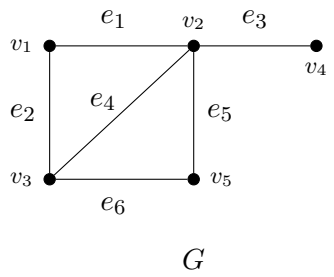


Figura III.12: Grafo de ordem 5 e tamanho 6.

Sua matriz de incidência é

$$B(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definição III.12. Seja G um grafo. O *grafo linha* de G, $\ell(G)$, é construído tomando as arestas de G como vértices de $\ell(G)$ e ligando dois vértices de $\ell(G)$ quando as arestas correspondentes em G possuem um vértice em comum.

Exemplo III.15. *Seja G o grafo da esquerda na Figura III.13. O grafo da direita é o seu grafo linha, $\ell(G)$.*

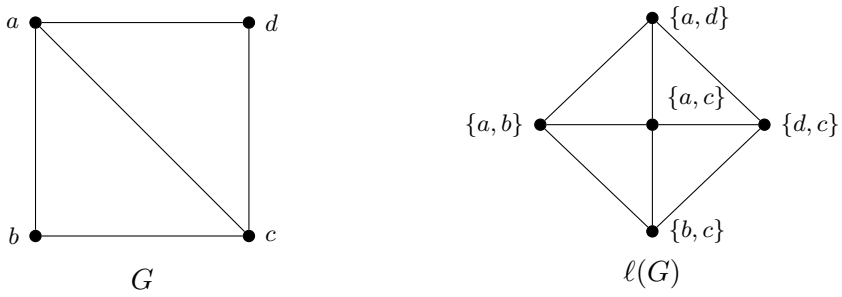


Figura III.13: Um grafo e seu grafo linha.

Lema III.2 ([Cvetković, 2010])**.** *Sejam $B = B(G)$ a matriz de incidência de um grafo $G = (V, E)$, $\ell(G)$ o seu grafo linha e A_ℓ a matriz de adjacência de $\ell(G)$. Então $B^TB = 2I + A_\ell$.*

Demonstração. Primeiramente, verifiquemos que B^TB e A_ℓ tem a mesma ordem. Se G é de ordem n e tamanho m, então B tem ordem (n, m) e B^T tem ordem (m, n). Assim, B^TB tem ordem (m, m). Sabemos também que $\ell(G)$ é um grafo com tantos vértices quantas são as arestas de G, então A_ℓ tem ordem (m, m) e assim, vemos que B^TB e A_ℓ têm a mesma ordem.

Consideremos $\alpha_{ij} = [B^TB]_{ij}$. Sejam $(L_i)^T$, i-ésima linha de B^T e L_j, j-ésima coluna de B.

Daí temos que $\alpha_{ij} = (L_i)^T L_j$. Assim, $\alpha_{ij} = 1$ quando e_i e e_j têm um vértice em comum, $\alpha_{ij} = 2$ se $i = j$ e $\alpha_{ij} = 0$, se e_i e e_j não têm vértices em comum. Desta forma

$$B^T B = \begin{cases} 0, & \text{se } e_i \text{ e } e_j \text{ não têm vértices em comum;} \\ 1, & \text{se } e_i \text{ e } e_j \text{ têm apenas um vértice em comum;} \\ 2, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Agora, tomemos $\beta_{ij} = [A_\ell]_{ij}$. Como L_i e L_j são vetores colunas associados às arestas de G então $\beta_{ij} = 1$ se e_i e e_j incidem num mesmo vértice. Agora, se e_i e e_j não incidem num mesmo vértice $\beta_{ij} = 0$. Logo,

$$A_\ell = \begin{cases} 0, & \text{se } e_i \text{ e } e_j \text{ não tem vértices em comum;} \\ 0, & \text{se } i = j; \\ 1, & \text{se } e_i \text{ e } e_j \text{ tem apenas um vértice em comum.} \end{cases}$$

Portanto, $B^T B = 2I + A_\ell$. □

Como consequência do Teorema II.4 temos a seguinte observação.

Observação III.2 ([Cvetković, 2010])**.** *Se $G = (V, E)$ é um grafo e $B = B(G)$ é sua matriz de incidência, então $B^T B$ é positiva semidefinida.*

A proposição a seguir apresenta uma cota inferior para os autovalores do grafo linha.

Proposição III.11 ([Cvetković, 2010])**.** *Seja G um grafo. Se λ é um autovalor de $\ell(G)$ então $\lambda \geq -2$.*

Demonstração. Pelo Lema III.2, $B^T B = 2I + A_\ell$. Se λ é autovalor do grafo linha então existe vetor v não nulo tal que

$$(B^T B)v = (2I + A_\ell)v = 2v + \lambda v = (2 + \lambda)v.$$

Portanto, $2+\lambda$ é autovalor de $B^T B$. Como $B^T B$ é matriz positiva semidefinida, segue que $2+\lambda \geq 0$. Logo, $\lambda \geq -2$. □

Apesar de restritiva, a condição dada na Proposição III.11 não caracteriza grafos linha. Existem grafos cujos autovalores são todos maiores ou iguais a -2 e não são grafos linha de ninguém, como pode ser visto no Exemplo III.16.

Exemplo III.16. *Seja $G \simeq K_{1,4}$, como na Figura III.14.*

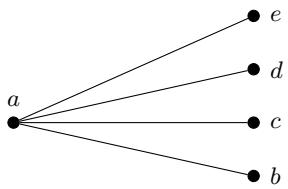


Figura III.14: $K_{1,4}$

Spec$(G) = \{-2, 0^{[3]}, 2\}$*, ou seja,* G *possui menor autovalor igual a* -2*, mas não é grafo linha de nenhum grafo. De fato, suponhamos por absurdo que fosse, como* a *e* e *são adjacentes, as arestas correspondentes no grafo original devem compartilhar um vértice, e o mesmo vale para as arestas* $\{a, d\}$*,* $\{a, c\}$ *e* $\{a, b\}$*. Como uma aresta é incidente em dois vértices, deveriam existir pelo menos duas arestas entre os vértice* e*,* d*,* c *e* b*, o que é um absurdo.*

Definição III.13. Seja G um grafo de ordem n. A *matriz dos graus* de G, $D(G) = D$, é a matriz diagonal de ordem n definida por $[D(G)]_{ii} = d_G(v_i) = d(v_i)$.

O lema a seguir relaciona a matriz de incidência com a matriz dos graus e de adjacência de um grafo.

Lema III.3 ([Cvetković, 2010])**.** *Sejam* G *um grafo de ordem* n*,* $B = B(G)$ *a sua matriz de incidência e* $A = A(G)$ *sua matriz de adjacência. Desta forma,* $BB^T = D + A$*.*

Demonstração. Se $i = j$, o produto da i-ésima linha de B pela j-ésima coluna de B^T é o grau do vértice v_i em G. Se $i \neq j$, a (i, j)-ésima entrada em BB^T é 1 ou 0, conforme v_i e v_j sejam ou não adjacentes em G. □

Lema III.4 ([Cvetković, 2010])**.** *Sejam* $B = B(G)$ *a matriz de incidência de um grafo* G*,* $\ell(G)$ *o seu grafo linha e* A_ℓ *a matriz de adjacência de* $\ell(G)$*. Se existe vetor* v *não nulo tal que* $Bv = \mathbf{0}$*, então* -2 *é autovalor de* A_ℓ*.*

Demonstração. Como foi visto no Lema III.2, $B^TB = 2I + A_\ell$. Seja v um vetor não nulo tal que $Bv = \mathbf{0}_n$. Assim,

$$(B^TB)v = B^T(Bv) = B^T\mathbf{0}_n = \mathbf{0}_m.$$

Desta maneira, $(2I + A_\ell)v = 2Iv + A_\ell v = \mathbf{0}_m$, ou seja, $A_\ell v = -2v$. Como $v \neq \mathbf{0}_m$, temos que -2 é autovalor de A_ℓ. □

Lema III.5 ([Cvetković, 2010])**.** *Se* $B = B(G)$ *é a matriz de incidência de um grafo* G *que contém um ciclo de comprimento par, então existe vetor* $v \neq \mathbf{0}_m$ *tal que* $Bv = \mathbf{0}_n$

Demonstração. Seja $e_1, e_2, \ldots, e_{2k}$ um ciclo de comprimento $2k$ em G. Indexemos primeiramente as $2k$ arestas que fazem parte do ciclo e depois indexemos as demais na construção da matriz

de incidência. Tomemos o vetor $v = [v_i]$ tal que $v_i = (-1)^i$ para $1 \leq i \leq 2k$ e $v_i = 0$ para $i > 2k$. Logo, $Bv = \mathbf{0}_n$. □

Exemplo III.17. *Seja G o grafo da Figura III.15.*

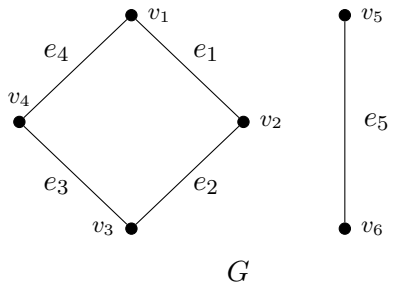


Figura III.15: Grafo de ordem 6 e tamanho 5.

Dado o vetor $v = [(-1)^1, (-1)^2, (-1)^3, (-1)^4, 0]$, temos:

$$Bv = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0v.$$

A partir dos Lemas III.4 e III.5, podemos concluir que se G contém um ciclo de comprimento par, então -2 é autovalor de $\ell(G)$. A recíproca também é verdadeira, e a demonstração pode ser encontrada em [Cvetković, 1971]. De maneira semelhante, também é provado que se G tem dois ciclos ímpares na mesma componente conexa se e somente se -2 é autovalor de G, como visto em [Cvetković *et al.*, 1980].

A seguir, apresentamos um resultado que relaciona os polinômios característicos do grafo e de seu grafo linha quando o grafo é r-regular.

Proposição III.12 ([Cvetković, 2010])**.** *Se G é um grafo r-regular de ordem n e tamanho m, então*

$$p(\ell(G), \lambda) = (\lambda + 2)^{m-n} p(G, \lambda - r + 2).$$

Demonstração. Consideremos as matrizes:

$$U = \begin{bmatrix} \lambda I_n & -B \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \text{ e } V = \begin{bmatrix} I_n & B \\ B^T & \lambda I_m \end{bmatrix},$$

onde B é a matriz de incidência do grafo G. Desta forma,

$$UV = \begin{bmatrix} \lambda I_n - BB^T & 0 \\ B^T & \lambda I_m \end{bmatrix} \text{ e } VU = \begin{bmatrix} \lambda I_n & 0 \\ \lambda B^T & \lambda I_m - B^T B \end{bmatrix}.$$

E como $\det(UV) = \det(VU)$, temos

$$\det(\lambda I_m)\det(\lambda I_n - BB^T) = \det(\lambda I_n)\det(\lambda I_m - B^T B),$$

ou seja,

$$\lambda^m \det(\lambda I_n - BB^T) = \lambda^n \det(\lambda I_m - B^T B) \tag{III.2}$$

Desta forma, pelo Lema III.2, temos

$$p(\ell(G), \lambda) = \det(\lambda I_m - A_\ell) = \det(\lambda I_m - (B^T B - 2I_m)) = \det((\lambda + 2)I_m - B^T B).$$

Agora, pela Equação (III.2) e pelo Lema III.3, obtemos

$$\begin{aligned} p(\ell(G), \lambda) &= (\lambda + 2)^{m-n} \det((\lambda + 2)I_n - BB^T) \\ &= (\lambda + 2)^{m-n} \det((\lambda + 2)I_n - (D + A)) \\ &= (\lambda + 2)^{m-n} \det((\lambda + 2)I_n - rI_n - A)) \\ &= (\lambda + 2)^{m-n} \det((\lambda + 2 - r)I_n - A) \\ &= (\lambda + 2)^{m-n} p(G, \lambda - r + 2). \end{aligned}$$

□

Corolário III.8 ([Cvetković, 2010]). *Se G é r-regular e* Spec$(G) = \{r, \lambda_1^{[m_1]}, \ldots, \lambda_{s-1}^{[m_{s-1}]}\}$*, então*

$$\text{Spec}(\ell(G)) = \{2r - 2, (r - 2 + \lambda_1)^{[m_1]}, \ldots, (r - 2 + \lambda_{s-1})^{[m_{s-1}]}, -2^{[m-n]}\}$$

onde s é quantidade de autovalores distintos de G.

Demonstração. Como $p(\ell(G), \lambda) = (\lambda + 2)^{m-n} p(G, \lambda - r + 2)$, para que λ seja raiz de $p(\ell(G), \lambda)$ basta que seja -2 ou raiz do polinômio $p(G, \lambda - r + 2)$. Logo, -2 tem multiplicidade $m - n$. Seja λ_i um autovalor de G. Se λ é raiz de $p(G, \lambda - r + 2)$, então $\lambda_i = \lambda - r + 2$. Se $i = 1$, temos que $r = \lambda - r + 2$, e assim $\lambda = 2r - 2$, com multiplicidade 1. Se $i \neq 1$, obtemos $\lambda = r - 2 + \lambda_i$, com multiplicidade m_i. Assim, obtemos o resultado. □

Exemplo III.18. *Seja $G \simeq K_5$. Como* Spec$(K_5) = \{4, -1^{(4)}\}$*, pelo Corolário III.8, temos que*

Spec$(\ell(K_5)) = \{6, 1^{[4]}, -2^{[5]}\}$.

III.2.2 A Matriz laplaciana sem sinal

Começamos esta subseção definindo a matriz laplaciana de um grafo e apresentando uma de suas propriedades que será útil ao relacioná-la com a matriz laplaciana sem sinal e posteriormente com a matriz A_α.

Definição III.14. A matriz *laplaciana* de G, $L(G)$, é definida como $L(G) = D(G) - A(G)$.

Proposição III.13 ([Grone e Zimmerman, 1990])**.** *Se G é um grafo de ordem n, então*

$$\lambda_1(L(G)) \leq n \text{ e } \lambda_n(L(G)) = 0.$$

Como consequência da Proposição III.13, temos que $L(G)$ é uma matriz positiva semidefinida. O resultado a seguir é bem conhecido na literatura, para mais detalhes indicamos [Godsil e Royle, 2001].

Proposição III.14. *Se G é um grafo de ordem n, então a multiplicidade do 0 como autovalor de $L(G)$ é igual a quantidade de componentes conexas de G.*

Definição III.15. A matriz *laplaciana sem sinal* de G, $Q(G) = Q$, é definida como sendo $Q(G) = D(G) + A(G)$.

Seja G um grafo de ordem n e B sua matriz de incidência. Denotamos $p(L(G), x) = p_L(G, x)$ e $p(Q(G), x) = p_Q(G, x)$. De acordo com o Lema III.3, temos $BB^T = D + A$. Logo, $Q = BB^T$.

Pelos Lemas III.2 e III.3 sabemos que

$$BB^T = D + A = Q,\ B^TB = A_\ell + 2I, \tag{III.3}$$

onde $A_{\ell(G)}$ é a matriz de adjacência de $\ell(G)$. Como sabemos da Teoria de Matrizes, os autovalores não negativos de BB^T e B^TB são os mesmos, o que nos leva à próxima proposição.

Proposição III.15 ([Cvetković, 2010])**.** *Se G é um grafo de ordem n e tamanho m, então*

$$p(\ell(G), \lambda) = (\lambda + 2)^{m-n} p_Q(G, \lambda + 2).$$

Demonstração. A demonstração é similar à da Proposição III.12, considerando $Q = D + A$. □

O resultado a seguir é consequência do Teorema II.4, considerando $Q = BB^T$, onde B é a matriz de incidência de um grafo e a Proposição III.17 relaciona o fato de o grafo ser bipartido com o zero ser um autovalor da matriz laplaciana sem sinal.

Proposição III.16 ([Cvetković, 2010]). *Seja G um grafo. A matriz laplaciana sem sinal de G é positiva semidefinida.*

Proposição III.17 ([Cvetković, 2010]). *Seja G um grafo conexo. O menor autovalor da matriz laplaciana sem sinal de G é igual a 0 se e somente se G é bipartido. Neste caso, 0 é um autovalor simples.*

Corolário III.9 ([Cvetković, 2010]). *Seja G um grafo. A multiplicidade de 0 como autovalor da matriz laplaciana sem sinal é igual ao número de componentes conexas bipartidas.*

Em geral, o Q-polinômio não contém a informação do grafo ser bipartido ou não. Ele contém se o grafo é conexo, mas nós não podemos identificar um grafo conexo a partir do seu Q-polinômio.

Um fato interessante a se notar é que com o Q-polinômio juntamente com a informação de uma das propriedades em questão (conexidade ou se o grafo é bipartido) nos possibilita recuperar a informação da outra propriedade: se nós sabemos o número de componentes conexas, podemos decidir se o grafo é bipartido, e se nós sabemos se o grafo é bipartido, podemos descobrir se ele é conexo.

O resultado a seguir relaciona $p_Q(G,x)$ e $p_L(G,x)$ quando G é bipartido.

Proposição III.18 ([Cvetković, 2010]). *Seja G um grafo. $p_Q(G,x) = p_L(G,x)$ se e somente se G é bipartido.*

Demonstração. Suponhamos G seja bipartido, com células V_1 e V_2 tais que $|V_1| = n_1$ e $|V_2| = n_2$. Pelo Lema III.1, podemos escrever

$$A = \begin{bmatrix} 0 & R \\ R^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Desta forma, podemos escrever $Q = D + A$ e $L = D - A$ como

$$Q = \begin{bmatrix} D_1 & R \\ R^T & D_2 \end{bmatrix} \text{ e } L = \begin{bmatrix} D_1 & -R \\ -R^T & D_2 \end{bmatrix},$$

onde D_1 é a matriz diagonal que possui em sua diagonal principal os n_1 primeiros graus dos vértices G e D_2 a matriz diagonal que possui os n_2 graus dos vértices restantes de G. Assim, temos,

$$p_Q(G,x) = \det(xI - Q) = \det \begin{bmatrix} xI_{n_1} - D_1 & -R \\ -R^T & xI_{n_2} - D_2 \end{bmatrix}$$

Como $xI_{n_1} - D_1$ é invertível, podemos aplicar o Teorema II.6, e obtemos,

$$\begin{aligned} p_Q(G,x) &= \det(xI - Q) \\ &= \det(xI_{n_1} - D_1)\det(xI_{n_2} - D_2 - (-R^T(xI - D_2)^{-1}(-R))) \\ &= \det(xI_{n_1} - D_1)\det(xI_{n_2} - D_2 - (R^T(xI - D_2)^{-1}R)) \\ &= p_L(G,x). \end{aligned}$$

Reciprocamente, sabemos que a multiplicidade do autovalor 0 no L-espectro é igual ao número de componentes conexas, enquanto no Q-espectro, a multiplicidade de 0 é igual ao número de componentes que são bipartidas. Assim, conclui-se o resultado. □

Proposição III.19 ([Cvetković, 2010])**.** *Seja G um grafo de ordem n e $p_Q(G,x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. O tamanho de G é $m = -a_{n-1}/2$.*

Demonstração. Como sabemos pelas relações de Girard, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = -a_{n-1}/a_n$. Como o traço da matriz laplaciana sem sinal é igual à soma dos graus dos vértices de G, temos que $-a_{n-1}/a_n = 2m$, onde m é a quantidade de arestas em G. Além disso, $p_Q(G,x)$ é mônico, ou seja, $a_n = 1$. Logo, $-a_{n-1} = 2m$ e portanto, $m = -(a_{n-1})/2$. □

A proposição a seguir mostra como uma relação de coespectralidade em relação à matriz laplaciana sem sinal de dois grafos implica numa relação de coespectralidade em relação à matriz de adjacência de seus grafos linha.

Proposição III.20 ([Cvetković, 2010])**.** *Se dois grafos são copespectrais em relação à Q, então seus grafos linha são coespectrais.*

Demonstração. Sejam G_1 e G_2 dois grafos. Sabemos da Proposição III.15 que

$$p(\ell(G_1),\lambda) = (\lambda+2)^{m-n}p_Q(G_1,\lambda+2)$$

$$p(\ell(G_2),\lambda) = (\lambda+2)^{m-n}p_Q(G_2,\lambda+2)$$

Como G_1 e G_2 são coespectrais em relação à Q, sabemos que $p_Q(G_1,x) = p_Q(G_2,x)$, e desta forma, podemos escrever $p(\ell(G_2),\lambda) = (\lambda+2)^{m-n}p_Q(G_1,\lambda+2)$, ou ainda,

$$p_Q(G_1,\lambda+2) = \frac{p(\ell(G_2),\lambda)}{(\lambda+2)^{m-n}}$$

E assim obtemos,

$$p(\ell(G_1),\lambda) = (\lambda+2)^{m-n}\frac{p(\ell(G_2),\lambda)}{(\lambda+2)^{m-n}}$$

e portanto,

$$p(\ell(G_1)) = p(\ell(G_2)).$$

□

Apesar da Proposição III.20, dois grafos cujos grafos linha são coespectrais não precisam ser coespectrais em relação à Q. Isso se deve ao fato de que dois grafos linhas coespectrais não precisam ter o mesmo número de vértices nos grafos originais. Podemos verificar melhor este fato no exemplo a seguir.

Exemplo III.19. *Sejam $\ell(G_1)$ e $\ell(G_2)$ os grafos linha da Figura III.16.*

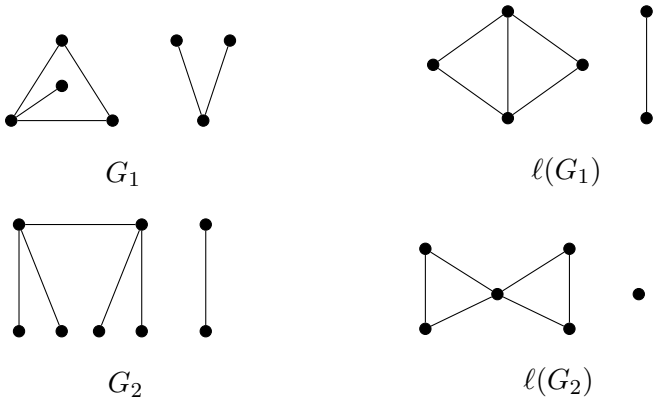


Figura III.16: Grafos linha coespectrais

Os grafos $\ell(G_1)$ e $\ell(G_2)$ têm o mesmo polinômio característico $p(\ell(G_1), \lambda) = p(\ell(G_2), \lambda) = \lambda(\lambda^2 - \lambda - 4)(\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$. Reescrevendo a equação da Proposição III.15, vemos que é possível obter o Q-polinômio a partir de polinômio característico do grafo linha da seguinte maneira:

$$p_Q(G_1, \lambda) = \frac{p(\ell(G_2), \lambda - 2)}{\lambda^{m-n}}.$$

O grafo original G_1 tem 7 vértices e 6 arestas com $p_Q(G_1, \lambda) = \lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda^2-5\lambda+2)$ enquanto G_2 tem 8 vértices e 6 arestas com $p_Q(G_2, \lambda) = \lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda^2-5\lambda+2)$.

A seguir, exibimos a Proposição III.7 para o caso da matriz laplaciana sem sinal.

Proposição III.21 ([Cvetković, 2010])**.** *Se G é um grafo r-regular, então*

(i) $2r$ é um autovalor da matriz laplaciana sem sinal de G;

(ii) G é um grafo conexo se e somente se a multiplicidade de $2r$ é 1;

(iii) qualquer autovalor λ de $Q(G)$ satisfaz $0 \leq \lambda \leq 2r$.

Demonstração. (i) Suponhamos que G é r-regular. Pela Proposição III.7 r é autovalor de A associado a um vetor $v \neq \mathbf{0}_n$ e além disso $A = Q - Ir$. Daí, temos,

$$Av = rv \Rightarrow (Q - Ir)v = rv \Rightarrow Qv = 2rv.$$

Logo, $2r$ é um autovalor de $Q(G)$;

(ii) Suponhamos que G é conexo. Seja $x = [x_1 x_2 \dots x_n]^T$ um autovetor associado ao autovalor $2r$ de $Q(G)$ ($Qx = 2rx$). Suponhamos que x_j é uma entrada de x com maior valor absoluto. Assim, temos que $[Qx]_j = rx_j + \sum_{v_i \sim v_j} x_i$, onde $\sim$ representa a relação de adjacência entre v_i e v_j. Logo $rx_j + \sum_{v_i \sim v_j} x_i = 2rx_j$, o que implica $\sum_{v_i \sim v_j} x_i = rx_j$. Daí, temos que para cada l tal que v_l é adjacente a v_j,

$$r|x_j| = |x_j| + (r-1)|x_j| = |\sum x_i| \leq \sum |x_i| \leq |x_l| + (r-1)|x_j|.$$

Isto nos fornece $|x_j| \leq |x_l|$ e, portanto, $x_l = x_j$ para todos estes r vértices. Como G é conexo, podemos prosseguir sucessivamente desta maneira até mostrar que todas as entradas de x são iguais. Então x é múltiplo de **1** e o autoespaço associado ao autovalor $2r$ tem dimensão 1.

Reciprocamente, suponhamos que $2r$ possua multiplicidade 1. Agora, suponhamos por absurdo que G seja desconexo e tomemos $G_1, G_2, \dots, G_m$ as componentes conexas de G. Como cada uma das componentes conexas é um grafo r-regular, então $2r$ é um autovalor de Q com multiplicidade 1 para cada G_i. Mas como $p_Q(G, \lambda) = p_Q(G_1, \lambda)p_Q(G_2\lambda) \dots p_Q(G_m, \lambda)$, segue-se que $2r$ é um autovalor de G com multiplicidade m, contrariando a hipótese. Logo, G é conexo.

(iii) Seja y um autovetor não nulo de $Q(G)$ associado a um autovalor λ e seja y_j uma entrada de y com maior valor absoluto. Como em ii), temos $ry_j + \sum y_i = \lambda y_j$ e $|\lambda - r||y_j| = |\sum y_i| \leq r|y_j|$. Logo $|\lambda - r| \leq r$, e portanto, $0 \leq \lambda \leq 2r$.

□

A Proposição III.22 relaciona o maior autovalor da matriz laplaciana sem sinal de um grafo regular com o grau de seus vértices, seu tamanho, além de relacionar a multiplicidade deste autovalor com a quantidade de componentes conexas do grafo.

Proposição III.22 ([Cvetković, 2010])**.** *Seja G um grafo de ordem n e tamanho m, e seja q_1 o maior autovalor de Q. Se G é regular então seu grau é $q_1/2$, e o número de componentes é igual à multiplicidade de q_1. Mais ainda, G é regular se e somente se $4m = nq_1$.*

Proposição III.23 ([Cvetković, 2010])**.** *Um grafo G é regular se e somente se sua matriz laplaciana sem sinal tem um autovetor com todas as coordenadas iguais a 1.*

Demonstração. Seja G um grafo r-regular. Daí temos, $Q\mathbf{1} = 2r\mathbf{1}$. Portanto, $2r$ é autovalor associado ao autovetor $\mathbf{1}$.

Reciprocamente, suponhamos que $Q\mathbf{1} = \lambda\mathbf{1}$. Desta maneira, para toda linha i, temos que $2d(v_i) = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} = \lambda$. Portanto G é regular de grau $\lambda/2$. □

Para grafos regulares, podemos expressar o polinômio característico da matriz de adjacência e da matriz laplaciana em termos do polinômio característico da matriz laplaciana sem sinal como podemos ver a seguir. Desta forma, para grafos regulares, toda a teoria existente do espectro da matriz de adjacência e da matriz laplaciana são diretamente transmitidas para a matriz laplaciana sem sinal. Se G é um grafo r-regular, temos $D = Ir$ e $A = Q - Ir$. Logo,

$$p(G,x) = \det(xI - A) = \det(xI - Q + rI) = \det((x+r)I - Q) = p_Q(G, x+r).$$

Se $p_L(G,x)$ é o polinômio característico da matriz laplaciana de G, temos

$$p_L(G,x) = \det(xI - L) = \det(xI - rI + A) = \det(xI - rI + Q - rI) =$$

$$\det((x-2r)I + Q) = (-1)^n \det((2r-x)I - Q) = (-1)^n p_Q(G, 2r-\lambda).$$

Assim, para grafos regulares, a função $\phi_1(a) = a + r$ leva os autovalores de A aos autovalores de Q e pode ser considerada como um isomorfismo da A-teoria de grafos regulares à parte correspondente da Q-teoria. O mesmo pode ser dito da função $\phi_2(q) = 2r - q$ mas levando os autovalores de Q aos autovalores de L.

Exemplo III.20. *Neste exemplo, são apresentados os espectros das matrizes A, Q e L de duas classes de grafos regulares: os completos e os ciclos. Tendo em mãos os autovalores de uma das matrizes, podemos calcular os autovalores das outras duas. Para o grafo completo K_n, com $n \geq 2$, temos*

- Spec$(A(K_n)) = \{n-1, (-1)^{n-1}\}$;
- Spec$(Q(K_n)) = \{2n-2, (n-2)^{n-1}\}$;
- Spec$(L(K_n)) = \{0, n^{n-1}\}$.

Para o grafo ciclo C_n, com $n \geq 3$, temos:

- Spec$(A(C_n)) = \{2cos(\frac{\pi 0}{2n}), 2cos(\frac{\pi 1}{2n}), \ldots, 2cos(\frac{\pi(n-1)}{2n})\}$;

- Spec$(Q(C_n)) = \{2 + 2cos(\frac{\pi 0}{2n}), 2 + 2cos(\frac{\pi 1}{2n}), \ldots, 2 + 2cos(\frac{\pi(n-1)}{2n})\}$;
- Spec$(L(C_n)) = \{2 - 2cos(\frac{\pi 0}{2n}), 2 - 2cos(\frac{\pi 1}{2n}), \ldots, 2 - 2cos(\frac{\pi(n-1)}{2n})\}$.

A propriedade de simetria dos autovalores da matriz laplaciana sem sinal de um grafo bipartido regular é uma consequência imediata da conhecida simetria em relação à origem dos autovalores da matriz de adjacência de um grafo bipartido (Teorema 3.11 [Cvetković *et al.*, 1995]), como pode ser visto na Proposição III.24.

Proposição III.24 ([Cvetković, 2010])**.** *Se G é um grafo bipartido r-regular então o Q-espectro de G é simétrico em relação a r.*

III.3 Matriz A_α

Até aqui conhecemos os conceitos da matriz de adjacência, matriz dos graus, matriz de incidência, matriz laplaciana e laplaciana sem sinal. Nesta seção estudamos algumas propriedades básicas da matriz A_α, introduzida em 2017 por Nikiforov [Nikiforov, 2017]. Esta matriz contempla as matrizes de adjacência, dos graus e laplaciana sem sinal, e se relaciona com a matriz laplaciana, como veremos a seguir. A matriz A_α é ainda um caso particular da matriz de adjacência universal, definida em [Haemers e Omidi, 2010], cuja definição é a seguinte: sejam a, b, c, d escalares tais que $a \neq 0$ e seja G um grafo de ordem n. A matriz de adjacência universal de G é definida como $U(G) = aA(G) + bI_n + cJ_n + dD(G)$. É fácil notar que se fizermos $b = c = 0$, $d = \alpha$ e $a = 1 - \alpha$, com $0 < \alpha \leq 1$, $U(G) = \alpha D(G) + (1 - \alpha)A(G) = A_\alpha(G)$.

A definição a seguir e os resultados desta seção, bem como as demonstrações omitidas, podem ser encontradas em [Nikiforov, 2017].

Definição III.16. Seja G um grafo, $A(G)$ a sua matriz de adjacência e $D(G)$ sua matriz diagonal dos graus. Para cada $\alpha \in [0, 1]$, a matriz $A_\alpha(G)$ é a combinação linear convexa definida da seguinte maneira

$$A_\alpha(G) = \alpha D(G) + (1 - \alpha)A(G). \tag{III.4}$$

Muitos fatos sugerem que o estudo desta matriz é muito adequado. Para começar, temos

$$A(G) = A_0(G),\ Q(G) = 2A_{1/2}(G) \text{ e } D(G) = A_1(G).$$

Ou seja, a matriz A_α generaliza as definições das matrizes $A(G)$, $D(G)$ e $Q(G)$. Podemos ainda interpretar a matriz A_α como um segmento de reta no espaço das matrizes ligando $A(G)$ e $D(G)$ passando por $Q(G)$.

Como mencionado anteriormente, a matriz A_α também se relaciona com a matriz laplaciana, e essa relação é dada por

$$A_\alpha(G) - A_\beta(G) = (\alpha - \beta)L(G), \tag{III.5}$$

onde $\alpha, \beta \in [0, 1]$. De fato,

$$\begin{aligned} A_\alpha(G) - A_\beta(G) &= \alpha D(G) + (1-\alpha)A(G) - \beta D(G) + (\beta - 1)A(G) \\ &= (\alpha - \beta)D(G) + (\beta - \alpha)A(G) \\ &= (\alpha - \beta)L(G). \end{aligned}$$

III.3.1 Propriedades Básicas da Matriz A_α

Dado um grafo G de ordem n, o sistema de equações de autovalor para a matriz A_α é obtido como vemos a seguir. Sejam $A(G) = A$, $D(G) = D$, $A_\alpha(G) = A_\alpha$ e x o autovetor associado ao autovalor λ. Desta forma, temos

$$A_\alpha x = \lambda x \Leftrightarrow (\alpha D + (1-\alpha)A)x = \lambda x$$

$$\alpha Dx + (1-\alpha)Ax = \lambda x.$$

Na k-ésima entrada de λx podemos verificar que

$$\lambda x_k = \alpha d(v_k)x_k + (1-\alpha)\sum_{v_i \sim v_k} x_i,\ 1 \leq k \leq n. \tag{III.6}$$

Como feito para a matriz laplaciana sem sinal, a Proposição III.7 agora será adaptada para a matriz A_α.

Proposição III.25 ([Nikiforov, 2017])**.** *Se G é um grafo r-regular e $\alpha \in [0, 1]$, então*

(i) r é um autovalor da matriz $A_\alpha(G)$;

(ii) G é um grafo conexo se e somente se a multiplicidade de r é 1;

(iii) qualquer autovalor λ de $A_\alpha(G)$ satisfaz $r(2\alpha - 1) \leq \lambda \leq r$.

Demonstração. (i) Sejam G um grafo r-regular e $\alpha \in [0, 1]$. Pela Proposição III.7 r é autovalor de A associado a um vetor $v \neq \mathbf{0}_n$. Verificando a equação que define a matriz A_α para o caso de grafos regulares, temos

$$A_\alpha(G) = \alpha r I + (1-\alpha)A(G).$$

Se $\alpha = 1$, $A_1 = D = rI_n$ e o resultado segue. Se $\alpha \neq 1$, então

$$A(G) = \frac{1}{1-\alpha}(A_\alpha(G) - \alpha r I_n).$$

Como r é autovalor de A associado a v $(Av = rv)$, temos que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{A_\alpha(G) - \alpha r I}{1-\alpha}\right) v = rv \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad & (A_\alpha(G) - \alpha r I)v = (1-\alpha)rv = rv - \alpha rv \\ \Leftrightarrow \quad & A_\alpha(G)v - \alpha rv = rv - \alpha rv \\ \Leftrightarrow \quad & A_\alpha(G)v = rv. \end{aligned}$$

Logo, r é um autovalor de $A_\alpha(G)$.

(ii) Seja $x = [x_1 x_2 \dots x_n]^T$ um autovetor associado ao autovalor r de $A_\alpha(G)$ $(A_\alpha(G)x = rx)$. Suponhamos que x_j é uma entrada de x com maior valor absoluto. Daí, temos que $[A_\alpha x]_j = \alpha r x_j + (1-\alpha)\sum_{v_i \sim v_j} x_i$. Logo, $\alpha r x_j + (1-\alpha)\sum_{v_i \sim v_j} x_i = r x_j$, o que implica $\sum_{v_i \sim v_j} x_i = r x_j$. Daí, temos que para cada l tal que v_l é adjacente a v_j,

$$r|x_j| = |x_j| + (r-1)|x_j| = |\sum_{v_i \sim v_j} x_i| \leq \sum_{v_i \sim v_j} |x_i| \leq |x_l| + (r-1)|x_j|.$$

Isto nos fornece $|x_j| \leq |x_l|$ e, portanto, $x_l = x_j$ para todos estes r vértices, pois x_j tem valor máximo. Como G é conexo, podemos prosseguir sucessivamente desta maneira até mostrar que todas as entradas de x são iguais. Então x é múltiplo de **1** e o autoespaço associado ao autovalor r tem dimensão 1.

Reciprocamente, suponhamos que r possua multiplicidade 1. Agora, suponhamos por absurdo que G seja desconexo e tomemos $G_1, G_2, \dots, G_m$ as componentes conexas de G. Como cada uma das componentes é um grafo conexo r-regular, então r é um autovalor de A_α com multiplicidade 1 para cada G_i. Mas como

$$p_{A_\alpha}(G, \lambda) = p_{A_\alpha}(G_1, \lambda) p_{A_\alpha}(G_2, \lambda) \cdots p_{A_\alpha}(G_m, \lambda),$$

segue-se que r é um autovalor de G com multiplicidade m, contrariando a hipótese. Logo, G é conexo.

(iii) Seja $y = [y_1 y_2 \dots y_n]^T$ um autovetor não nulo de $A_\alpha(G)$ associado a um autovalor λ e seja y_j

uma entrada de y com maior valor absoluto. Como em (ii), temos

$$\alpha r y_j + (1-\alpha)\sum_{v_i \sim v_j} y_i = \lambda y_j$$

e assim,

$$\begin{aligned} \lambda y_j - \alpha r y_j &= (1-\alpha)\sum_{v_i \sim v_j} y_i \\ |\lambda - \alpha r||y_j| &= (1-\alpha)|\sum_{v_i \sim v_j} y_i| \leq (1-\alpha) r |y_j| \\ |\lambda - \alpha r| &\leq (1-\alpha) r \end{aligned}$$

e desta forma,

$$2\alpha r - r \leq \lambda \leq r.$$

□

Proposição III.26 ([Nikiforov, 2017]). *Se G é um grafo r-regular de ordem n e $\alpha \in [0,1]$, então $\lambda_i(A_\alpha(G)) = \alpha r + (1-\alpha)\lambda_i(A(G))$ para cada $1 \leq i \leq n$.*

Demonstração. Como G é r-regular, sabemos que $D(G) = rI_n$. Agora, seja x_i um autovetor de $A(G)$ associado ao autovalor $\lambda_i(A(G))$. Desta forma,

$$\begin{aligned} A_\alpha(G)x_i &= (\alpha r I + (1-\alpha)A(G))x_i \\ &= \alpha r x_i + (1-\alpha)\lambda_i(A(G))x_i \\ &= (\alpha r + (1-\alpha)\lambda_i(A(G)))x_i, \text{ para } 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

□

Como feito para a matriz de adjacência, apresentamos a seguir um resultado que relaciona alguns autovalores da matriz A_α de um grafo que contenha vértices gêmeos.

Proposição III.27 ([Brondani *et al.*, 2019]). *Sejam G um grafo, v_i, v_{j_p}, $1 \leq p \leq n$ vértices gêmeos em G e $\alpha \in [0,1]$.*

(i) Se v_i e v_{j_p} são vértices gêmeos verdadeiros então $\alpha(d(v_i)+1) - 1 \in$ Spec$(A_\alpha(G))$;

(ii) Se v_i e v_{j_p} são vértices gêmeos falsos então $\alpha d(v_i) \in$ Spec$(A_\alpha(G))$.

Proposição III.28 ([Nikiforov, 2017]). *Sejam G um grafo de ordem n e $\alpha \in [0,1]$, com $A_\alpha(G) = A_\alpha$, $x = [x_1 x_2 \dots x_n]^T$ e $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. As formas quadráticas a seguir são equivalentes:*

$$\langle A_\alpha x, x\rangle = \alpha \sum_{v_i \in V(G)} x_i^2 d(v_i) + 2(1-\alpha) \sum_{\{v_i,v_j\}\in E} x_i x_j; \tag{III.7}$$

$$\langle A_\alpha x, x\rangle = \sum_{\{v_i,v_j\}\in E} \alpha x_i^2 + 2(1-\alpha) x_i x_j + \alpha x_j^2; \tag{III.8}$$

$$\langle A_\alpha x, x\rangle = (2\alpha - 1) \sum_{v_i \in V(G)} x_i^2 d(v_i) + (1-\alpha) \sum_{\{v_i,v_j\}\in E} (x_i + x_j)^2. \tag{III.9}$$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
\langle A_\alpha x, x\rangle &= \langle (\alpha D + (1-\alpha)A)x, x\rangle = \langle \alpha Dx + (1-\alpha)Ax, x\rangle \\
&= \langle \alpha Dx, x\rangle + \langle (1-\alpha)Ax, x\rangle = \\
&= \alpha\langle Dx, x\rangle + (1-\alpha)\langle Ax, x\rangle \\
&= \alpha\langle [d(v_i)x_i], x\rangle + (1-\alpha)\langle [2 \sum_{\{v_i,v_j\}\in E} x_j], x\rangle \\
&= \alpha(\sum_{v_i \in V(G)} d(v_i)x_i^2) + 2(1-\alpha)[x_i \sum_{\{v_i,v_j\}\in E} x_j] \\
&= \alpha \sum_{v_i \in V(G)} x_i^2 d(v_i) + 2(1-\alpha) \sum_{\{v_i,v_j\}\in E} x_i x_j.
\end{aligned}$$

Para a Equação (III.8), basta observar que $\sum_{v_i \in V(G)} x_i^2 d(v_i) = \sum_{\{v_i,v_j\}\in E} x_i^2 + x_j^2$, e daí segue diretamente da Equação (III.7).

Para a Equação (III.9), analisando mais uma vez a Equação (III.7), podemos reescrevê-la como

$$\langle A_\alpha x, x\rangle = \alpha \sum_{v_i \in V(G)} x_i^2 d(v_i) + \sum_{\{v_i,v_j\}\in E} 2(1-\alpha) x_i x_j.$$

Somando zero escrito nas formas $(\alpha-1)x_i^2 + (1-\alpha)x_i^2$ e $(\alpha-1)x_j^2 + (1-\alpha)x_j^2$, obtemos

$$\begin{aligned}
\alpha \sum_{v_i \in V(G)} x_i^2 d(v_i) + \sum_{\{v_i,v_j\}\in E} 2(1-\alpha)x_i x_j + (\alpha-1)x_i^2 + (1-\alpha)x_i^2 + (\alpha-1)x_j^2 + (1-\alpha)x_j^2 &= \\
\alpha \sum_{v_i \in V(G)} x_i^2 d(v_i) + \sum_{\{v_i,v_j\}\in E} (1-\alpha)x_i^2 + 2(1-\alpha)x_i x_j + (1-\alpha)x_j^2 + (\alpha-1)(x_i^2 + x_j^2) &= \\
= \alpha \sum_{v_i \in V(G)} x_i^2 d(v_i) + \sum_{\{v_i,v_j\}\in E} (1-\alpha)(x_i + x_j)^2 + (\alpha-1)(x_i^2 + x_j^2).
\end{aligned}$$

Como observado na obtenção da Equação III.8, $\sum_{\{v_i,v_j\}\in E} x_i^2 + x_j^2 = \sum_{v_i \in V(G)} x_i^2 d(v_i)$ desta forma

$$\alpha \sum_{v_i \in V(G)} x_i^2 d(v_i) + \sum_{\{v_i,v_j\}\in E} (1-\alpha)(x_i + x_j)^2 + (\alpha-1) \sum_{v_i \in V(G)} x_i^2 d(v_i) =$$

$$(2\alpha - 1) \sum_{v_i \in V(G)} x_i^2 d(v_i) + (1 - \alpha) \sum_{\{v_i, v_j\} \in E} (x_i + x_j)^2,$$

como queríamos. □

Cada uma dessas representações pode ser muito útil em demonstrações. Da Equação (III.5) obtemos a seguinte propriedade de $\langle A_\alpha x, x \rangle$:

Proposição III.29 ([Nikiforov, 2017]). *Se $1 \geq \alpha \geq \beta \geq 0$ e G é um grafo de ordem n, então*

$$\langle A_\alpha(G)x, x \rangle \geq \langle A_\beta(G)x, x \rangle$$

para qualquer vetor de ordem n.

Demonstração. Comecemos analisando a diferença $\langle A_\alpha(G)x, x \rangle - \langle A_\beta(G)x, x \rangle =$

$$\langle A_\alpha(G)x - A_\beta(G)x, x \rangle = \langle (A_\alpha(G) - A_\beta(G))x, x \rangle.$$

Pela Equação (III.5), temos

$$\langle (\alpha - \beta)L(G)x, x \rangle = (\alpha - \beta)\langle L(G)x, x \rangle \geq 0$$

pois $L(G)$ é positiva semidefinida. Desta forma,

$$\langle A_\alpha(G)x, x \rangle - \langle A_\beta(G)x, x \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle A_\alpha(G)x, x \rangle \geq \langle A_\beta(G)x, x \rangle$$

□

Além disso, como $A_\alpha(G)$ é uma matriz real e simétrica, obtemos do princípio de Rayleigh resultado a seguir:

Proposição III.30 ([Nikiforov, 2017]). *Se $\alpha \in [0, 1]$ e G é um grafo de ordem n com $A_\alpha(G) = A_\alpha$, então*

$$\lambda_1(A_\alpha) = \max_{||x||=1} \langle A_\alpha(G)x, x \rangle \text{ e } \lambda_n(A_\alpha) = \min_{||x||=1} \langle A_\alpha(G)x, x \rangle. \tag{III.10}$$

Mais ainda, se x é um vetor unitário de ordem n, então $\lambda_1(A_\alpha) = \langle A_\alpha(G)x, x \rangle$ se e somente se x é um autovetor unitário associado ao autovalor $\lambda_1(A_\alpha)$ e $\lambda_n(A_\alpha) = \langle A_\alpha(G)x, x \rangle$ se e somente se x é um autovetor unitário associado ao autovalor $\lambda_n(A_\alpha)$.

Da Equação (III.10) temos o resultado a seguir.

Proposição III.31 ([Nikiforov, 2017]). *Se $\alpha \in [0, 1]$ e G é um grafo com $A_\alpha(G) = A_\alpha$, então*

$$\lambda_1 = \max\{\lambda_1(A_\alpha(H)) | H \text{ é uma componente conexa de } G\},$$

$$\lambda_n = \min\{\lambda_n(A_\alpha(H))|H \text{ é uma componente conexa de } G\}.$$

Observação III.3. *Se G é desconexo, $\lambda_1(A_\alpha)$ pode ser atingido em diferentes componentes conexas de G, dependendo de α. Por exemplo, seja $k \geq 2$ um inteiro e seja G a união disjunta de $K_{3k+1,3k+1}$, $K_{3,3k^2}$ e $K_{1,3k^2+1}$. Calculando o maior autovalor de A_0, $A_{1/2}$ e A_1 para cada uma das três componentes conexas de G, temos a tabela a seguir.*

	$K_{3k+1,3k+1}$	$K_{3,3k^2}$	$K_{1,3k^2+1}$	G
$\lambda_1(A_0)$	$3k+1$	$3k$	$\sqrt{3k^2+1}$	$3k+1$
$\lambda_1(A_{1/2})$	$3k+1$	$(3k^2+3)/2$	$(3k^2+1)/2$	$(3k^2+3)/2$
$\lambda_1(A_1)$	$3k+1$	$3k^2$	$3k^2+1$	$3k^2+1$

Podemos observar que $\lambda_1(A_\alpha)$ pode ser alcançado em qualquer componente conexa de G dependendo de α.

Se G é um grafo r-regular de ordem n, então

$$A_\alpha(G) = \alpha r I_n + (1-\alpha)A(G).$$

Pela Proposição III.26 vimos que existe uma correspondência linear entre o espectro de $A_\alpha(G)$ e $A(G)$. Além disso, da Proposição III.25 sabemos que, então $\lambda_1(A_\alpha(G)) = r$ para qualquer $\alpha \in [0,1]$ e se G é conexo, a equação obtida na Proposição III.26 implica que $\lambda_k(A(G))$ é crescente em α para $2 \leq k \leq n$. Esta última propriedade é válida também para qualquer grafo, como vemos na proposição a seguir.

Proposição III.32 ([Nikiforov, 2017])**.** *Seja $1 \geq \alpha > \beta \geq 0$. Se G é um grafo de ordem n com $A_\alpha(G) = A_\alpha$ e $A_\beta(G) = A_\beta$, então*

$$\lambda_k(A_\alpha) - \lambda_k(A_\beta) > 0 \tag{III.11}$$

para qualquer $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Demonstração. Pela Equação (III.5) temos que, $A_\alpha - A_\beta = (\alpha - \beta)L$. Utilizando o Teorema II.1 na equação $A_\alpha - B = A_\beta$ onde $B = (\alpha-\beta)L(G)$ temos que

$$\begin{aligned} &\lambda_k(A_\beta) + \lambda_n((\alpha-\beta)L(G)) \leq \lambda_k(A_\alpha) \quad \Leftrightarrow \\ &\lambda_k(A_\beta) + (\alpha-\beta)\lambda_n(L(G)) \leq \lambda_k(A_\alpha). \end{aligned}$$

Pela Proposição III.13 sabemos que $\lambda_n(L(G)) = 0$ e assim, $\lambda_k(A_\alpha) - \lambda_k(A_\beta) \geq 0$, o que conclui a demonstração. □

Agora, apresentamos os A_α-espectros dos grafos completo e bipartido completo, que são utilizados para obter resultados posteriormente.

Proposição III.33 ([Nikiforov, 2017]). *Seja $p \geq q \geq 1$. Se $\alpha \in [0,1]$, os autovalores de $A_\alpha(K_{p,q})$ são*

$$\lambda_1(A_\alpha(K_{p,q})) = \frac{1}{2}\left(\alpha(p+q) + \sqrt{\alpha^2(p+q)^2 + 4pq(1-2\alpha)}\right),$$

$$\lambda_n(A_\alpha(K_{p,q})) = \frac{1}{2}\left(\alpha(p+q) - \sqrt{\alpha^2(p+q)^2 + 4pq(1-2\alpha)}\right),$$

$$\lambda_k(A_\alpha(K_{p,q})) = \alpha p \text{ para } 1 < k \leq q,$$

$$\lambda_k(A_\alpha(K_{p,q})) = \alpha q \text{ para } q < k < p+q.$$

Proposição III.34 ([Nikiforov, 2017]). *Para cada $\alpha \in [0,1]$, o A_α-espectro do grafo completo é dado por* $\text{Spec}(A_\alpha(K_n)) = \{n-1, (\alpha n - 1)^{[n-1]}\}$

III.3.2 Positividade semidefinida de $A_\alpha(G)$

Uma importante propriedade da matriz laplaciana sem sinal $Q(G)$ é que ela é uma matriz positiva semidefinida. Isso certamente não é verdade para a matriz $A_\alpha(G)$ quando α é suficientemente pequeno, mas para $\alpha \geq 1/2$ este fato é verificado, como mostra a Proposição III.35.

Proposição III.35 ([Nikiforov e Rojo, 2017]). *Sejam G um grafo e $\alpha \in [0,1]$. As seguintes afirmações se verificam.*

(i) Se $\alpha > 1/2$, então $A_\alpha(G)$ é positiva semidefinida;

(ii) Se $\alpha > 1/2$ e G não tem vértices isolados, então $A_\alpha(G)$ é positiva definida.

Demonstração. Sejam $x = [x_1 \dots x_n]^T$ um vetor não nulo e $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Se $\alpha > 1/2$, então para qualquer aresta $\{v_i, v_j\} \in E$, pela Equação (III.9) (levando em conta que $\sum_{v_i \in V(G)} x_i^2 d(v_i) = \sum_{\{v_i,v_j\} \in E} x_i^2 + x_j^2$), vemos que

$$\langle A_\alpha(G)x, x\rangle \geq (1-\alpha)(x_i + x_j)^2 + (2\alpha - 1)x_i^2 + (2\alpha - 1)x_j^2 \geq 0. \tag{III.12}$$

Desta forma, $A_\alpha(G)$ é positiva semidefinida. Agora, suponha que G não tenha vértices isolados. Escolhemos um vértice v_i com $x_i \neq 0$ e seja $\{v_i, v_j\} \in E$. Assim, teremos a desigualdade estrita em (III.12), implicando que $A_\alpha(G)$ é positiva definida. □

Pelas Proposições III.32 e III.35 se $\alpha > \beta$ conclui-se que A_β é positiva (semi)definida para algum α, então A_α é positiva (semi)definida.

Se G é o grafo completo K_n, pela Proposição III.34 temos que $\lambda_n(A_\alpha(K_n)) = n\alpha - 1$. Desta forma, A_α é positiva semidefinida se e somente se $\alpha \geq 1/n$. Este exemplo pode ser generalizado na Proposição III.36, a qual relaciona a positividade da matriz $A_\alpha(G)$ com o número cromático de G.

Proposição III.36 ([Nikiforov e Rojo, 2017])**.** *Sejam G um grafo regular com número cromático $\chi(G)$ e $\alpha \in [0, 1]$. Se $A_\alpha(G)$ é positiva semidefinida então $\alpha \geq 1/\chi(G)$.*

Demonstração. Sejam G um grafo r-regular e A sua matriz de adjacência. A cota de Hoffman [Hoffman, 2003] implica que

$$\lambda_n(A) \leq -\frac{\lambda_1(A)}{\chi(G) - 1} = -\frac{r}{\chi(G) - 1}.$$

Desta forma, pela Proposição III.26 temos que

$$\lambda_n(A_\alpha(G)) \leq \alpha r - (1 - \alpha)\frac{r}{\chi(G) - 1} = \left(\alpha - \frac{1}{\chi(G)}\right)\frac{\chi(G)r}{\chi(G) - 1} < 0,$$

e consequentemente $\alpha \geq \frac{1}{\chi(G)}$. □

Em 2017, Nikiforov e Rojo [Nikiforov e Rojo, 2017], definiram $\alpha_0(G)$ como o menor valor no intervalo $[0, 1]$ tal que $\lambda_n(A_{\alpha_0}(G)) \geq 0$. Desta forma, $A_\alpha(G)$ é positiva semidefinida se e somente se $\alpha_0(G) \leq \alpha \leq 1$. A seguir, apresentamos alguns resultados envolvendo o α_0 para grafos regulares e conexos bipartidos.

Primeiramente, apresentamos uma propriedade geral do $\alpha_0(G)$ que ajuda a estender os resultados de grafos conexos para grafos não conexos.

Proposição III.37 ([Nikiforov e Rojo, 2017])**.** *Se G é um grafo desconexo, então*

$$\alpha_0 = \max\{\alpha_0(H) : H \text{ é uma componente conexa de } G\}.$$

Proposição III.38 ([Nikiforov e Rojo, 2017])**.** *Se G é um grafo r-regular, então*

$$\alpha_0(G) = \frac{-\lambda_n(A(G))}{r - \lambda_n(A(G))}.$$

Demonstração. Se G é r-regular de ordem n, então

$$A_\alpha(G) = \alpha r I_n + (1 - \alpha)A(G),$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Assim, verificamos que

$$\lambda_n(A_\alpha(G)) = \alpha r + (1-\alpha)\lambda_n(A(G)).$$

É facil observar que o lado direito da igualdade acima cresce com α. Logo α_0 é a solução única da equação

$$\alpha_0 r + (1-\alpha_0)\lambda_n(A(G)) = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\alpha_0 r + \lambda_n(A(G)) - \alpha_0\lambda_n(A(G)) &= 0 \\
\alpha_0 r - \alpha_0\lambda_n(A(G)) &= -\lambda_n A((G)) \\
\alpha_0(r - \lambda_n(A(G))) &= -\lambda_n(A(G)) \\
\alpha_0 &= \frac{-\lambda_n(A(G))}{r - \lambda_n(A(G))},
\end{aligned}$$

e o resultado segue. □

Proposição III.39 ([Nikiforov e Rojo, 2017])**.** *Um grafo conexo G é bipartido se e somente se $\alpha_0(G) = 1/2$.*

Encerramos esta seção apresentando apresentando uma cota superior para α_0.

Proposição III.40 ([Nikiforov e Rojo, 2017])**.** *Se G é um grafo de ordem n não bipartido, então*

$$\alpha_0 \leq \frac{-\lambda_n(A(G))}{\lambda_n(Q(G)) - 2\lambda_n(A(G))} < \frac{\sqrt{\lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil}}{\frac{1}{12n^2} + 2\sqrt{\lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil}}.$$

III.3.3 Algumas cotas para os autovalores da matriz A_α baseadas em grau

Podemos dizer que as cotas baseadas em grau são as mais usadas na Teoria Espectral de Grafos. Nesta subseção, são apresentados algumas cotas deste tipo para a matriz $A_\alpha(G)$.

Proposição III.41 ([Nikiforov, 2017])**.** *Sejam G um grafo de ordem n com graus dos vértices $d(v_1) \geq \cdots \geq d(v_n)$, $\alpha \in [0,1]$ e $A_\alpha(G) = A_\alpha$. Se $v_k \in V(G)$, então*

$$\lambda_k(A_\alpha) \leq d(v_k).$$

Em particular, $\lambda_1(A_\alpha) \leq \Delta(G)$.

Demonstração. Aplicando $\alpha = 1$ na Proposição III.32 temos que $\lambda_k(A_1) - \lambda_k(A_\beta) \geq 0$. Além disso, como $A_1 = D$, segue $\lambda_k(D) - \lambda_k(A_\beta) \geq 0$, ou seja, $\lambda_k(D) \geq \lambda_k(A_\beta)$. Mas, como $\lambda_k(D) = d(v_k)$

temos que

$$\lambda_k(A_\beta) \leq d(v_k).$$

□

A cota $\lambda_n(A_\alpha) \leq \delta(G)$ obtida na Proposição III.41 ainda pode ser melhorada. Seja v_i um vértice de grau mínimo e definamos o vetor $x = [x_1, \ldots, x_n]$ com $x_i = 1$ e as outras entradas nulas. Desta forma, da Observação III.30 e da Equação (III.7), temos que

$$\lambda_n(A_\alpha) \leq \langle A_\alpha x, x\rangle = \alpha \sum_{v_i \in V(G)} x_i^2 d(v_i) + 2(1-\alpha) \sum_{\{v_i,v_j\}\in E} x_i x_j = \alpha\delta.$$

Mas, se $\alpha \in [0,1)$, o vetor x não satisfaz as autoequações para $\lambda_n(A_\alpha)$. Desta forma, vemos que

$$\lambda_n(A_\alpha) < \delta\alpha. \tag{III.13}$$

A próxima proposição é uma aplicação da desigualdade de Weyl (Teorema II.11).

Proposição III.42 ([Nikiforov, 2017]). *Se $\alpha \in [0,1]$ e G é um grafo com $A(G) = A$ e $A_\alpha(G) = A_\alpha$, então*

$$\alpha\delta + (1-\alpha)\lambda_k(A) \leq \lambda_k(A_\alpha) \leq \alpha\Delta + (1-\alpha)\lambda_k(A).$$

A seguir, é dada uma cota inferior de $\lambda_1(A_\alpha)$ que generaliza um resultado de Lovász [Sachs e Lovász, 1980].

Proposição III.43 ([Nikiforov, 2017]). *Seja G é um grafo com $\Delta(G) = \Delta$ e $\alpha \in [0,1]$. Então*

$$\lambda_1(A_\alpha) \geq \frac{1}{2}\left(\alpha(\Delta+1) + \sqrt{\alpha^2(\Delta+1)^2 + 4\Delta(1-2\alpha)}\right).$$

Se G é conexo, a igualdade vale se e somente se $G = K_{1,\Delta}$

Proposição III.44 ([Nikiforov, 2017]). *Seja G um grafo com $\Delta(G) = \Delta$. Se $\alpha \in [0, 1/2]$ então*

$$\lambda_1(A_\alpha(G)) \geq \alpha(\Delta+1).$$

Se $\alpha \in [1/2, 1)$ então

$$\lambda_1(A_\alpha(G)) \geq \alpha\Delta + (1-\alpha)^2/\alpha.$$

Capítulo IV O A_α-espectro de operações entre grafos

Após Nikiforov definir a matriz A_α em 2017, muitos estudos, sob diversos pontos de vista, foram feitos acerca desta matriz, como por exemplo estudos sobre a positividade semidefinida e a caracterização do A_α-espectro de algumas classes de grafos. Neste capítulo, oferecemos uma visão dos estudos sobre o espectro e a positividade semidefinida da matriz A_α de operações entre grafos, fundamentando-nos em uma seleção específica de artigos relevantes para este tema. Ao fim da Seção IV.3, a última deste capítulo, apresentamos demonstrações e enunciados alternativos para dois resultados demonstrados em [Brondani *et al.*, 2022].

IV.1 Operações união, *join*, e H-*join*

Nesta seção, apresentamos o A_α-espectro das operações união, *join* e H-*join*.

No Capítulo II explicitamos o A-espectro da união entre dois grafos. Agora, tratamos do seu A_α-espectro. Se rotularmos $G \cup H$ de modo que os vértices de G sejam os primeiros e os vértices de H sejam os últimos, podemos escrever

$$A(G \cup H) = \begin{bmatrix} A(G) & 0 \\ 0 & A(H) \end{bmatrix} \text{ e } D(G \cup H) = \begin{bmatrix} D(G) & 0 \\ 0 & D(H) \end{bmatrix}.$$

Desta forma, para $\alpha \in [0,1]$ $A_\alpha(G \cup H) = \alpha D(G \cup H) + (1-\alpha)A(G \cup H)$ é dada por

$$A_\alpha(G \cup H) = \begin{bmatrix} A_\alpha(G) & 0 \\ 0 & A_\alpha(H) \end{bmatrix}.$$

A proposição a seguir é consequência direta do Lema II.7.

Proposição IV.1 ([Nikiforov, 2017])**.** *Seja $\alpha \in [0,1]$. O A_α-espectro de $G \cup H$ é dado por*

$$Spec(A_\alpha(G \cup H)) = Spec(A_\alpha(G)) \cup Spec(A_\alpha(H))$$

Agora, revisitemos a operação *join* e explicitemos resultados a cerca de seu A_α-espectro. Sejam G e H grafos de ordem n_1 e n_2, respectivamente. Se rotularmos os vértices de $G \vee H$ de

modo que os vértices de G sejam os primeiros e os de H os últimos, podemos escrever

$$A(G \vee H) = \begin{bmatrix} A(G) & J_{n_1 \times n_2} \\ J_{n_2 \times n_1} & A(H) \end{bmatrix} \text{ e } D(G \vee H) = \begin{bmatrix} n_2 I_{n_1} + D(G) & 0 \\ 0 & n_1 I_{n_2} + D(H) \end{bmatrix}.$$

Desta maneira, a matriz A_α de $G \vee H$ é dada por

$$A_\alpha(G \vee H) = \begin{bmatrix} \alpha n_2 I_{n_1} + A_\alpha(G) & (1-\alpha) J_{n_1 \times n_2} \\ (1-\alpha) J_{n_2 \times n_1} & \alpha n_1 I_{n_2} + A_\alpha(H) \end{bmatrix}.$$

A seguir, apresentamos um resultado que explicita os autovalores do *join* de dois grafos regulares.

Teorema IV.1 ([Nikiforov, 2017]). *Sejam G_1 um grafo r_1-regular de ordem n_1, G_2 um grafo r_2-regular de ordem n_2 e $\alpha \in [0,1]$. O A_α-espectro da matriz $A_\alpha(G_1 \vee G_2)$ é determinado como a seguir:*

(i) O maior e o menor autovalores são dados por

$$\begin{aligned} \lambda_1(A_\alpha(G_1 \vee G_2)) &= \lambda_1(M), \\ \lambda_n(A_\alpha(G_1 \vee G_2)) &= \lambda_2(M), \end{aligned}$$

onde $M = \begin{bmatrix} r_1 + \alpha n_2 & (1-\alpha)^2 n_1 n_2 \\ 1 & r_2 + \alpha n_1 \end{bmatrix}$.

(ii) Os autovalores restantes são dados por

$$\begin{aligned} &\alpha r_1 + (1-\alpha)\lambda_k(A(G_1)),\ 2 \le k \le n_1, \\ &\alpha r_2 + (1-\alpha)\lambda_k(A(G_2)),\ 2 \le k \le n_2. \end{aligned}$$

A seguir, apresentamos a definição da operação H-*join*, que é uma generalização da operação *join*.

Definição IV.1. Dado um grafo H com $V(H) = \{1, 2, \ldots, p\}$ e uma família de grafos $\mathcal{F} = \{G_1, G_2, \ldots, G_p\}$ tal que $|V(G_j)| = n_j$, $1 \le j \le p$. O *H-join* de $G_1, G_2, \ldots, G_p$ é o grafo $G = \bigvee_H \{G_j; 1 \le j \le p\}$ tal que

$$V(G) = \bigcup_{j=1}^{p} V(G_j) \text{ e } E(G) = \left(\bigcup_{j=1}^{p} E(G_j) \right) \bigcup \left(\bigcup_{\{r,s\} \in E(H)} E(G_r \vee G_s) \right).$$

Observação IV.1. *Quando $H = K_2$, o H-join é a operação join, descrita na Definição III.3.*

A seguir, apresentamos exemplos de H-*join* de alguns grafos.

Exemplo IV.1. *Na Figura IV.1, ilustramos o grafo* K_3*-join de* $\mathcal{F} = \{2K_1, 4K_1, 3K_1\}$.

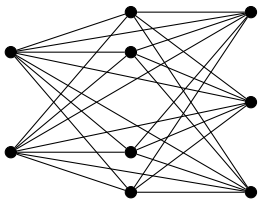


Figura IV.1: Grafo $\bigvee_{K_3}\{2K_1, 4K_1, 3K_1\}$.

Exemplo IV.2. *Na Figura IV.2, ilustramos o grafo* H*-join de* $\mathcal{F} = \{C_4, K_2, 2K_1\}$*, com* $H = P_3$.

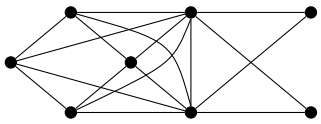


Figura IV.2: Grafo $\bigvee_{P_3}\{C_4, K_2, 2K_1\}$.

Em [Cardoso *et al.*, 2022] os autores explicitam o espectro da matriz de adjacência universal da operação H*-join* utilizando a matriz cadeia e autovalores principais do grafo.

IV.2 Produtos de grafos

Nesta seção, estudamos o A_α-espectro de algumas operações em grafos, denominadas *produtos*. Estes produtos são operações clássicas que podem ser encontradas com facilidade na literatura e indicamos para mais detalhes, por exemplo [Balakrishnan e Ranganathan, 2012].

Sejam G e H grafos de ordem n_1 e n_2, respectivamente. O *produto* de G e H, denotado por $G * H$, tem conjunto de vértices dado por $V(G * H) = V(G) \times V(H)$, e para cada forma de definir o conjunto de arestas, temos um diferente produto de grafos, os quais são apresentados ao longo desta seção. Sejam (v_1, v_2) e (v_1', v_2') vértices quaisquer de $G * H$. Consideremos as seguintes possibilidades: v_1 pode ser ou não adjacente a v_1' em G, v_2 pode ser ou não adjacente a v_2' em H, $v_1 = v_1'$ e/ou $v_2 = v_2'$.

Seja $V_i(G * H) \subset V(G * H)$ o subconjunto de vértices de $G * H$ cuja primeira coordenada é dada pelo vértice v_i de G, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n_1\}$. A ordenação de vértices que utilizamos de $G * H$ é dada por

$$V(G * H) = V_1(G * H) \cup V_2(G * H) \cup \cdots \cup V_{n_1}(G * H),$$

ou seja, as primeiras linhas das matrizes associadas ao produto $G * H$ estão associadas aos vértices de $V_1(G * H)$, as seguintes aos vértices de $V_2(G * H)$, e assim por diante.

IV.2.1 Produto cartesiano de grafos

Definição IV.2. O *produto cartesiano* de G e H, denotado por $G \times H$, é o grafo em que (v_1, v_2) e (v_1', v_2') são adjacentes se e somente se $v_1 = v_1'$ e v_2 é adjacente a v_2' em H, ou v_1 é adjacente a v_1' em G e $v_2 = v_2'$.

Exemplo IV.3. *Considere os grafos P_3 e P_2. A Figura IV.3 apresenta o produto cartesiano entre P_3 e P_2. A mesma rotulação utilizada neste exemplo é usada nos exemplos seguintes para os produtos entre grafos.*

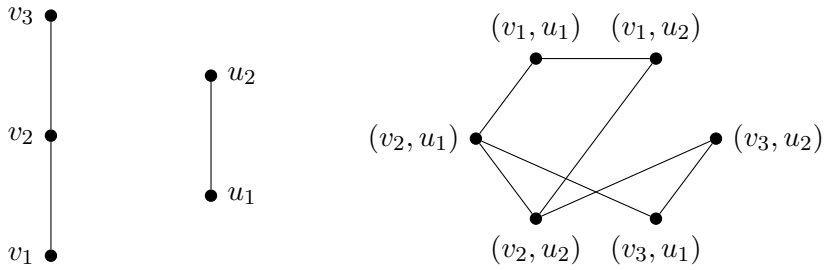


Figura IV.3: Grafos P_3, P_2 e $P_3 \times P_2$, respectivamente.

Se G e H são de ordens n_1 e n_2 respectivamente, suas matrizes de adjacência e de graus são dadas por

$$\begin{aligned} A(G \times H) &= A(G) \otimes I_{n_2} + I_{n_1} \otimes A(H) \\ D(G \times H) &= D(G) \otimes I_{n_2} + I_{n_1} \otimes D(H). \end{aligned}$$

Desta forma, a matriz $A_\alpha(G \times H)$ é dada por

$$A_\alpha(G \times H) = A_\alpha(G) \otimes I_{n_2} + I_{n_1} \otimes A_\alpha(H).$$

O A_α-espectro de $G \times H$ é explicitado no teorema a seguir.

Teorema IV.2 ([Li e Wang, 2019])**.** *Se G e H são grafos de ordens n_1 e n_2, respectivamente, e $\alpha \in [0, 1]$, então*

$$\text{Spec}(A_\alpha(G \times H)) = \{\lambda_i(A_\alpha(G)) + \lambda_j(A_\alpha(H)); 1 \leq i \leq n_1 \text{ e } 1 \leq j \leq n_2\}.$$

Exemplo IV.4. *Tomemos como exemplo o grafo $G \simeq P_3 \times P_2$ (Figura IV.3). Dos Teoremas III.33 e III.34 sabemos que*

$$\begin{aligned} \text{Spec}(A_\alpha(P_2)) &= \{1, 2\alpha - 1\}; \\ \text{Spec}(A_\alpha(P_3)) &= \left\{\alpha, \frac{1}{2}\left(3\alpha \pm \sqrt{9\alpha^2 - 16\alpha + 8}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Assim, a partir do Teorema IV.2, conclui-se que

$$\text{Spec}(A_\alpha(G)) = \left\{1+\alpha, 1+\frac{1}{2}\left(3\alpha \pm \sqrt{9\alpha^2-16\alpha+8}\right), 3\alpha-1, 2\alpha-1+\frac{1}{2}\left(3\alpha \pm \sqrt{9\alpha^2-16\alpha+8}\right)\right\}.$$

IV.2.2 Produto direto de grafos

Definição IV.3. O *produto direto* de G e H, denotado por $G \odot H$, é o grafo em que (v_1, v_2) e (v_1', v_2') são adjacentes se e somente se v_1 é adjacente a v_1' em G e v_2 é adjacente a v_2' em H.

Exemplo IV.5. *A Figura IV.4 exibe um exemplo do produto direto entre P_3 e P_2.*

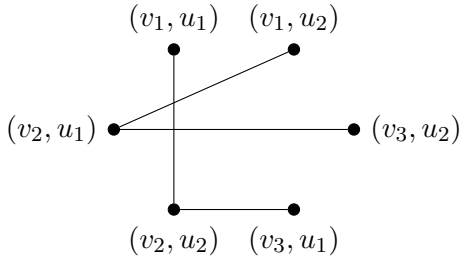


Figura IV.4: Grafo $P_3 \odot P_2$.

As matrizes de adjacência e de graus de $G \odot H$ são dadas por

$$\begin{aligned} A(G \odot H) &= A(G) \otimes A(H) \text{ e} \\ D(G \odot H) &= D(G) \otimes D(H). \end{aligned}$$

Desta forma, a matriz $A_\alpha(G \odot H)$ é dada por

$$A_\alpha(G \odot H) = \alpha D(G) \otimes D(H) + (1-\alpha)A(G) \otimes A(H).$$

O teorema a seguir explicita o maior autovalor da matriz A_α de $G \odot H$ no caso em que H é r-regular e G conexo.

Teorema IV.3 ([Li e Wang, 2019])**.** *Se H é r-regular, $\alpha \in [0,1]$ e G é conexo, então $\lambda_1(A_\alpha(G \odot H)) = r\lambda_1(A_\alpha(G))$.*

O corolário a seguir apresenta uma parte do A_α-espectro de $G \odot H$ no caso em que H é um grafo r-regular.

Teorema IV.4 ([Lima, 2021])**.** *Se G é um grafo de ordem n, $\alpha \in [0,1]$ e H é r-regular, então $r\lambda_i(A_\alpha(G))$, com $1 \leq i \leq n$ é autovalor de $A_\alpha(G \odot H)$.*

Exemplo IV.6. *Tomemos como exemplo o grafo $G \simeq P_3 \odot P_2$ (Figura IV.4). Já conhecemos o espectro de P_3 e sabemos que P_2 é 1-regular, desta forma, a partir do Corolário IV.4, conclui-se que* Spec$(A_\alpha(P_3)) \subset$ Spec$(A_\alpha(P_3 \odot P_2))$*. Mais ainda, aplicando o Teorema IV.3, obtemos que $\lambda_1(A_\alpha(P_2 \odot P_3)) = \lambda_1(A_\alpha(P_3))$, o que pode ser facilmente conferido levando em conta que $P_3 \odot P_2 \simeq 2P_3$.*

IV.2.3 Produto forte de grafos

Definição IV.4. O *produto forte* entre os grafos G e H, denotado por $G \otimes H$, é o grafo em que (v_1, v_2) e (v_1', v_2') são adjacentes se e somente se v_1 é adjacente ou igual a v_1' em G e v_2 é adjacente ou igual a v_2' em H.

Exemplo IV.7. *A Figura IV.5 ilustra o exemplo do produto forte entre P_3 e P_2.*

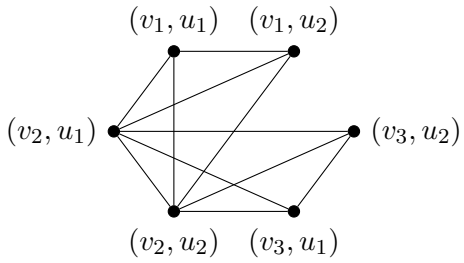


Figura IV.5: Grafo $P_3 \otimes P_2$.

A partir da definição, é possível ver que $G \times H$ e $G \odot H$ são subgrafos de $G \otimes H$, e além disso, as matrizes de adjacência e de graus de $G \otimes H$ são dadas por

$$\begin{aligned} A(G \otimes H) &= A(G \times H) + A(G \odot H) \text{ e} \\ D(G \otimes H) &= D(G \times H) + D(G \odot H). \end{aligned}$$

Portanto, a matriz $A_\alpha(G \otimes H)$ é dada pela expressão

$$A_\alpha(G \otimes H) = A_\alpha(G \times H) + A_\alpha(G \odot H).$$

Teorema IV.5 ([Li e Wang, 2019])**.** *Se H é r-regular, $\alpha \in [0, 1]$ e G é conexo então*

$$\lambda_1(A_\alpha(G \otimes H)) = r\lambda_1(A_\alpha(G)) + \lambda_1(A_\alpha(G)) + r.$$

Corolário IV.6 ([Lima, 2021])**.** *Se G é um grafo de ordem n, $\alpha \in [0, 1]$ e H é r-regular, então*

$$r\lambda_i(A_\alpha(G)) + \lambda_i(A_\alpha(G)) + r, 1 \leq i \leq n$$

são autovalores de $A_\alpha(G \otimes H)$.

Exemplo IV.8. *Tomemos como exemplo o grafo $G \simeq P_3 \otimes P_2$ (Figura IV.5). Já conhecemos o espectro de P_3 e sabemos que P_2 é 1-regular, desta forma, a partir do Corolário IV.6, conclui-se que*

$$\left\{2\alpha+1, 1+\left(3\alpha \pm \sqrt{9\alpha^2-16\alpha+8}\right)\right\} \subset \mathsf{Spec}(A_\alpha(G)).$$

E, pelo Teorema IV.5, temos

$$\lambda_1(A_\alpha(G)) = 2\alpha+1.$$

IV.2.4 Produto composição de grafos

Definição IV.5. O *produto composição* de G e H, denotado por $G \circ H$ é o grafo em que (v_1, v_2) e (v_1', v_2') são adjacentes se e somente se v_1 é adjacente a v_1' em G; ou $v_1 = v_1'$ e v_2 é adjacente a v_2' em H.

Exemplo IV.9. *A Figura IV.6 ilustra um exemplo do grafo composição entre P_3 e P_2.*

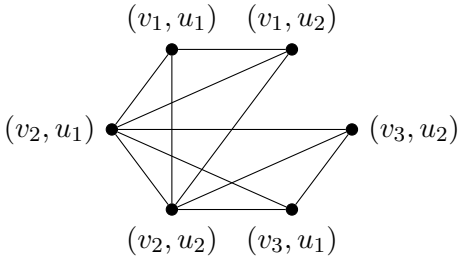


Figura IV.6: Grafo $P_3 \circ P_2$.

As matrizes de adjacência e de graus da produto composição entre grafos são dada por

$$\begin{aligned} A(G\circ H) &= I_{n_1}\otimes A(H) + A(G)\otimes J_{n_2} \text{ e} \\ D(G\circ H) &= I_{n_1}\otimes D(H) + n_2 D(G)\otimes I_{n_2}. \end{aligned}$$

Portanto, a matriz $A_\alpha(G\circ H)$ é

$$A_\alpha(G\circ H) = I_{n_1}\otimes A_\alpha(H) + (1-\alpha)A(G)\otimes J_{n_2} + \alpha n_2 D(G)\otimes I_{n_2}.$$

O teorema a seguir explicita o A_α-espectro de $G\circ H$ no caso em que H é um grafo r-regular.

Teorema IV.7 ([Li e Wang, 2019])**.** *Sejam G e H grafos de ordens n_1 e n_2, respectivamente. Se $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\alpha \in [0,1]$ e se H é r-regular então*

$$\begin{aligned} \mathsf{Spec}(A_\alpha(G\circ H)) &= \{r+\lambda_i(A_\alpha(G))n_2; 1\le i\le n_1\} \cup \\ &\quad \{\alpha r + (1-\alpha)\lambda_j(A(H)) + \alpha n_2 d_G(v_i); 1\le i\le n_1 \text{ e } 2\le j\le n_2\}. \end{aligned}$$

Exemplo IV.10. *Tomemos como exemplo o grafo $G \simeq P_3 \circ P_2$ (Figura IV.6). Já conhecemos o espectro de P_3 e sabemos que P_2 é 1-regular, e além disso, P_3 e P_2 tem ordens 3 e 2, respectivamente. Assim, a partir do Teorema IV.7, conclui-se que*

$$\text{Spec}(A_\alpha(G)) = \left\{2\alpha+1, 1+\left(3\alpha \pm \sqrt{9\alpha^2-16\alpha+8}\right), (6\alpha-1)^{[2]}, 4\alpha-1\right\}.$$

IV.3 Outras operações

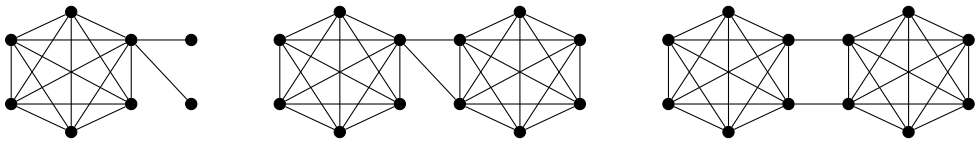
Em [Brondani *et al.*, 2022], os autores explicitaram o A_α-espectro e estudaram o α_0 das famílias de grafos *pineapple*, KK_n^ℓ, $\mathcal{H}_n^\ell$ e *block-indifference*, definidas a seguir.

Definição IV.6. Dados inteiros $q \geq 1$ e $p \geq 3$, o grafo *pineapple*, denotado por K_p^q, é obtido ligando q novos vértices a um vértice de um grafo completo K_p.

Definição IV.7. Dados os inteiros n e ℓ, $n \geq 3$ e $1 \leq \ell \leq n$, KK_n^ℓ é o grafo obtido tomando duas cópias do grafo completo K_n e adicionando ℓ arestas entre um vértice de uma cópia de K_n e ℓ vértices da outra cópia.

Definição IV.8. Dados os inteiros n e ℓ, $n \geq 3$ e $1 \leq \ell \leq n$, $\mathcal{H}_n^\ell$ é o grafo obtido de duas cópias do grafo completo K_n adicionando ℓ arestas entre ℓ vértices da cópia de K_n e os seus vértices correspondentes na outra cópia.

Na Figura IV.7, são apresentados exemplos dos grafos supracitados.



K_6^2 KK_6^2 $\mathcal{H}_6^2$

Figura IV.7: Exemplos de *pineapple*, KK_n^ℓ e $\mathcal{H}_n^\ell$

Para definir o grafo *block-indifference*, introduzimos primeiramente a noção de coalescência entre grafos.

Definição IV.9. Sejam $G = (V, E)$ e $H = (W, F)$ grafos tais que $V \cap W = \emptyset$. A *coalescência* de G e H, denotada por $G \cdot H$, é o grafo de ordem $|V| + |W| - 1$ que é obtido do grafo $G \cup H$ identificando um vértice de G com um vértice de H.

Na Figura IV.8 exibimos um exemplo de coalescência entre os grafos K_4 e K_3.

Definição IV.10 ([Belardo *et al.*, 2010])**.** Sejam $k \geq 1$ e $G_0(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ o grafo consistindo em k cliques de ordens $n_1, n_2, \ldots, n_k$, $n_i \geq 2$, $1 \leq i \leq k$, conectados pelo seguinte procedimento:

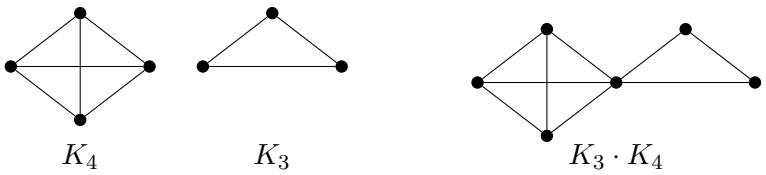


Figura IV.8: Exemplo de coalescência dos grafos K_4 e K_3.

1. $G_0(n_1) = K_{n_1}$;
2. $G_0(n_1, n_2)$ é obtido da coalescência dos grafos K_{n_1} e K_{n_2};
3. $G_0(n_1, n_2, \ldots, n_t)$ é obtido de $G_0(n_1, n_2, \ldots, n_{t-1})$ identificando um vértice da clique $K_{n_{t-1}}$ de menor grau com um vértice da clique K_{n_t}, $t \leq k$. O grafo $G_0(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ é chamado de *block-indifference*.

Seja G um grafo do tipo *block-indifference* com n vértices da forma $G_0(n_1, n_2, \ldots, n_k)$. Uma representação de G é dada por $R(G) = [n_1, n_2, \ldots, n_k]$, e quando $n_i = n_j = p$ com $1 \leq i, j \leq k$, outra representação é $R_k[p]$.

A Figura IV.9 mostra dois exemplos de grafos *block-indifference*.

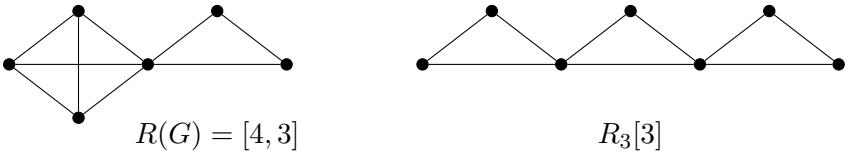


Figura IV.9: Exemplos de *block-indifference*.

As Proposições IV.2, IV.3, IV.4 e IV.5 explicitam parte do A_α-espectro dos grafos *pineapple*, KK_n^ℓ, $\mathcal{H}_n^\ell$ e *block-indifference*, respectivamente.

Proposição IV.2 ([Brondani *et al.*, 2022]). *Se* $\alpha \in [0, 1)$ *e* $G \simeq K_p^q$ *então* $p_{A_\alpha}(G, x) = (x - \alpha p + 1)^{p-2}(x - \alpha)^{q-1} f(x)$, *onde*

$$f(x) = x^3 - [\alpha(n+1) + p - 2]x^2 + [n\alpha^2 + (np-2)\alpha - n + 1]x - (p^2 - p + 2q)\alpha^2 - (2pq - 4q - n + 1)\alpha + q(p-2)$$

e $n = p + q$. *Se* x_1, x_2 *e* x_3 *são as raízes de* $f(x)$ *então*

$$\begin{cases} x_3 < \alpha p - 1 \leq \alpha < x_2 < x_1, & \textit{se } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{p-1}; \\ x_3 < \alpha < \alpha p - 1 < x_2 < x_1, & \textit{se } \frac{1}{p-1} < \alpha < 1. \end{cases}$$

Proposição IV.3 ([Brondani *et al.*, 2022]). *Seja* $G \simeq KK_n^\ell$ *e* $\alpha \in [0, 1)$. *Então*

$$p_{A_\alpha}(G, x) = (x - \alpha n + 1)^{2n-\ell-3}(x - \alpha n - \alpha + 1)^{l-1} g(x),$$

onde $g(x) = x^4 - [(2n+\ell+1)\alpha + 2n - 4]x^3 + \{[(n+2)\ell + n(n+1)]\alpha^2 + (2n-3)(2n+\ell+1)\alpha + (n-3)^2 - (\ell-3)\}x^2 - \{2n\ell\alpha^3 + 2[\ell^2 + n(n-1)(n+\ell+1) - \ell]\alpha^2 + [-3\ell^2 + (n^2-2n)\ell + 2n^3 - 7n^2 + 2n + 3]\alpha - \ell^2 + (2n-3)\ell + 2n^2 - 6n + 4\}x + 2\ell(n^2 - n + \ell)\alpha^3 + \{(2n-7)\ell^2 + (n-1)n[(n-3)\ell + n^2 - 1]\}\alpha^2 + [(7-3n)\ell^2 + (n-2)(n-1)\ell - (2n+1)(n-1)^2]\alpha + (n-2)\ell^2 - (n-2)(n-1)\ell + (n-1)^2$.

Proposição IV.4 ([Brondani *et al.*, 2022])**.** *Seja* $\alpha \in [0,1)$ *e* $G \simeq \mathcal{H}_n^\ell$*. Então*

$$p_{A_\alpha}(G,x) = (x - \alpha n + 1)^{2n-2\ell-2}(x - \alpha n)^{\ell-1}(x - \alpha n - 2\alpha + 2)^{\ell-1}h_1(x)h_2(x),$$

onde $h_1(x) = x^2 - (\alpha n + n - 1)x + \alpha n^2 - \alpha n - (1-\alpha)\ell$ *e* $h_2(x) = x^2 - (\alpha n + n + 2\alpha - 3)x + n(\alpha n - 1) + (\alpha - 1)[(2\alpha - 1)\ell + n - 2]$.

Proposição IV.5 ([Brondani *et al.*, 2022])**.** *Seja* $n_1 \leq n_2$ *e* $\alpha \in [0,1)$*. O polinômio característico da matriz* A_α *de qualquer grafo block-indifference* G *com* $R(G) = [n_1, n_2]$ *é*

$$p_{A_\alpha}(G,x) = (\alpha n_1 - 1)^{n_1-1}(\alpha n_2 - 1)^{n_2-1}f(x),$$

onde, $f(x) = -x^3 + [(n_1+n_2)(\alpha+1) - 4]x^2 - [(n_1+n_2-1)\alpha^2 + (n_1+n_2-3)(n_1+n_2)\alpha + (n_1-3)(n_2-2) - n_1]x + (n_1^2 - n_1 + n_2^2 - n^2)\alpha^2 - [2(n_1+n_2)^2 - (n_1n_2+1)(n_1+n_2+2)]\alpha - 2(n_1n_2+2) + 3(n_1+n_2)$.

Em [Brondani *et al.*, 2019] os autores estudaram o A_α-espectro dos grafos da família *firefly*, definida a seguir.

Definição IV.11 ([Aouchiche *et al.*, 2011])**.** Um grafo é denominado grafo *firefly*, denotado por $\mathcal{F}_{s,r,t}$, se é constituído por s arestas pendentes, r triângulos e t caminhos pendentes de tamanho 2, todos compartilhando um vértice.

Se $G \simeq \mathcal{F}_{s,r,t}$, G é de ordem $n = 2r + s + 2t + 1$ e tamanho $m = s + 3r + 2t$. Na Figura IV.10 apresentamos dois exemplos de grafos *firefly*.

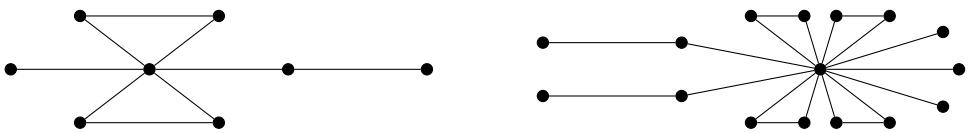


Figura IV.10: Grafos $F_{1,2,1}$ e $F_{3,4,2}$, respectivamente.

A Proposição IV.6 explicita o polinômio característico da matriz A_α do grafo *firefly*.

Proposição IV.6 ([Brondani *et al.*, 2019])**.** *Seja* $G \simeq \mathcal{F}_{s,r,t}$*. Para* $s \geq 1$*,* $r \geq 1$*,* $t \geq 1$ *e* $\alpha \in (0,1)$*,*

$$p_{A_\alpha}(G,x) = (x-\alpha)^{s-1}(x - (3\alpha-1))^r(x - (\alpha+1))^{r-1}(x^2 - 3\alpha x + \alpha^2 + 2\alpha - 1)^{t-1}g(x),$$

onde $g(x) = x^5+(-\alpha t-2\alpha r-\alpha s-5\alpha-1)x^4+((4\alpha^2+3\alpha-1)t+(8\alpha^2+6\alpha-2)r+(4\alpha^2+3\alpha-1)s+8\alpha^2+6\alpha-1)x^3+((-5\alpha^3-11\alpha^2+2\alpha+1)t+(-8\alpha^3-28\alpha^2+10\alpha)r+(-4\alpha^3-13\alpha^2+3\alpha+1)s-5\alpha^3-8\alpha^2+1)x^2+((2\alpha^4+12\alpha^3+\alpha^2-3\alpha)t+(2\alpha^4+28\alpha^3+2\alpha^2-10\alpha+2)r+(\alpha^4+11\alpha^3+7\alpha^2-8\alpha+1)s+\alpha^4+3\alpha^3+\alpha^2-\alpha)x+(-4\alpha^4-2\alpha^3+2\alpha^2)t+(-6\alpha^4-10\alpha^3+10\alpha^2-2\alpha)r+(-2\alpha^4-5\alpha^3+\alpha^2+3\alpha-1)s.$

Em [Brondani *et al.*, 2022], além de explicitar o A_α-espectro dos grafos *pineapple*, $KK_n^\ell, \mathcal{H}_n^\ell$ e *block-indifference* os autores ainda estudaram o problema de encontrar o α_0 nessas famílias como pode ser visto nas proposições a seguir.

Proposição IV.7 ([Brondani *et al.*, 2022])**.** *Seja* $G \simeq K_p^q$ *com* $p > 3$ *e* $q > 1$*. A matriz* $A_\alpha(G)$ *é semidefinida positiva se e somente se* $\alpha \in [\alpha_0(G), 1)$*, onde*

$$\alpha_0(G) = \frac{2(p-2)q}{(2p-5)q+1-p+\sqrt{(p+q-1)[(2p-3)^2q+p-1]}}.$$

Proposição IV.8 ([Brondani *et al.*, 2022])**.** *Seja* $G \simeq KK_n^\ell$ *e* $\alpha \in [0, 1)$*. A matriz* $A_\alpha(G)$ *é semidefinida positiva se e somente se* $\alpha \in [\alpha_0(G), 1)$*, onde* $\alpha_0 \in \left[\frac{1}{n}, \frac{\mu}{n+2(\mu-1)}\right]$ *e* $\mu = |\lambda_{2n}(A(G))|$*.*

Proposição IV.9 ([Brondani *et al.*, 2022])**.** *Sejam* $G \simeq \mathcal{H}_n^\ell$ *e* $\alpha \in [0, 1)$*. A matriz* $A_\alpha(G)$ *é semidefinida positiva se e somente se* $\alpha \in [\alpha_0(G), 1)$*, onde*

$$\alpha_0 = \begin{cases} \dfrac{-n^2-n+5+\sqrt{n(n-1)(n^2+3n-6)+1}}{4}, & \text{se } \ell = 1; \\ \dfrac{2}{n+2}, & \text{se } 2 \leq \ell \leq n. \end{cases}$$

Proposição IV.10 ([Brondani *et al.*, 2022])**.** *Seja* G *um grafo block-indifference com* $n > 3$ *e* $R(G) = [n_1, n_2]$ *tal que* $n_1 < n_2$*. Então* $A_\alpha(G)$ *é semidefinida positiva se e somente se* $\alpha \in [\alpha_0, 1)$*, onde* $\alpha_0(G) = \max\{1/n_1, c\}$ *tal que*

$$c = \frac{-[(n_1-2)n_2^2+(n_1^2-2n_1+1)n_2-2n_1^2+n_1+2]+\sqrt{d}}{2[n_2^2-n_2+n_1^2-n_1]}$$

e $d = (n_2+n_1-2)(n_1^2n_2^3-4n_1n_2^3+4n_2^3+n_1^3n_2^2-2n_1^2n_2^2+6n_1n_2^2-8n_2^2-4n_1^3n_2+6n_1^2n_2-4n_1n_2+5n_2+4n_1^3-8n_1^2+5n_1-2)$.

Em [da Silva Jr. *et al.*, 2022], os autores explicitaram o polinômio característico da matriz A_α da coalescência entre dois grafos, do grafo linha de G se G é semiregular bipartido e de algumas operações como o grafo subdivisão e o grafo total. A seguir, introduzimos uma notação e enunciamos o teorema que explicita o polinômio característico da matriz A_α da coalescência de dois grafos em função dos polinômios característicos das suas matrizes A_α e dos polinômios característicos das suas matrizes A_α após a remoção de um vértice.

Teorema IV.8 ([da Silva Jr. *et al.*, 2022])**.** *Seja $G \cdot H$ um grafo obtido da coalescência de G e H identificando os vértices $u \in V(G)$ e $v \in V(H)$. Desta forma, para $\alpha \in [0,1]$*

$$p_{A_\alpha}(G \cdot H, x) = p_{A_\alpha}(G,x)p_{A_\alpha}((H)_v,x) + p_{A_\alpha}((G)_u,x)p_{A_\alpha}(H,x) - xp_{A_\alpha}((G)_u,x)p_{A_\alpha}((H)_u,x).$$

A partir do Teorema IV.8, podemos utilizar uma técnica de demonstração diferente da apresentada em [Brondani *et al.*, 2022] para demonstrar as Proposições IV.2 e IV.5, como vemos a seguir.

Proposição IV.11. *Se $\alpha \in [0,1)$ e $G \simeq K_p^q$ então*

$$\begin{aligned} p_{A_\alpha}(G,x) &= (x-p+1)(x-\alpha p+1)^{p-1}x^q + (x-p+2)(x-\alpha(p-1)+1)^{p-2}(x-\alpha)^{q-1} \\ &\left(x - \frac{1}{2}\left[\alpha(q+1) + \sqrt{\alpha^2(q+1)^2 + 4q(1-2\alpha)}\right]\right)\left(x - \frac{1}{2}\left[\alpha(q+1) - \sqrt{\alpha^2(q+1)^2 + 4q(1-2\alpha)}\right]\right) \\ - &\ (x-p+2)(x-\alpha(p-1)+1)^{p-2}x^q. \end{aligned}$$

Demonstração. Basta observar que $K_p^q \simeq K_p \cdot K_{1,q}$, $(K_p)_v \simeq K_{p-1}$ para qualquer $v \in V(K_p)$, $(K_{1,q})_u \simeq \overline{K_q}$ quando u é o vértice de grau q. A partir das Proposições III.33 e III.34 temos o polinômio característico da matriz A_α dos grafos $K_{1,q}$ e K_p, respectivamente. Mais ainda, é fácil ver que $p_{A_\alpha}(\overline{K_q},x) = x^q$. Desta foma, pelo Teorema IV.8

$$\begin{aligned} p_{A_\alpha}(G,x) &= (x-p+1)(x-\alpha p+1)^{p-1}x^q + (x-p+2)(x-\alpha(p-1)+1)^{p-2}(x-\alpha)^{q-1} \\ &\left(x - \frac{1}{2}\left[\alpha(q+1) + \sqrt{\alpha^2(q+1)^2 + 4q(1-2\alpha)}\right]\right)\left(x - \frac{1}{2}\left[\alpha(q+1) - \sqrt{\alpha^2(q+1)^2 + 4q(1-2\alpha)}\right]\right) \\ - &\ (x-p+2)(x-\alpha(p-1)+1)^{p-2}x^q. \end{aligned}$$

e isto conclui a demonstração. □

Proposição IV.12. *Seja $n_1 \leq n_2$ e $\alpha \in [0,1)$. O polinômio característico da matriz A_α de qualquer grafo block-indifference G com $R(G) = [n_1, n_2]$ é*

$$\begin{aligned} p_{A_\alpha}(G,x) &= (x-n_1+1)(x-\alpha n_1+1)^{n_1-1}(x-n_2+2)(x-\alpha(n_2-1)+1)^{n_2-2} \\ &+ (x-n_2+1)(x-\alpha n_2+1)^{n_2-1}(x-n_1+2)(x-\alpha(n_1-1)+1)^{n_1-2} \\ &- (x-n_1+2)(x-\alpha(n_1-1)+1)^{n_1-2}(x-n_2+2)(x-\alpha(n_2-1)+1)^{n_2-2}. \end{aligned}$$

Demonstração. Basta observar que a partir da Proposição III.34, temos

$$p_{A_\alpha}(K_n,x) = (x-n+1)(x-\alpha n+1)^{n-1},$$

e como para qualquer $v \in V(K_n)$, $(K_n)_v = K_{n-1}$, temos

$$p_{A_\alpha}((K_n)_v, x) = p_{A_\alpha}(K_{n-1}, x) = (x - n + 2)(x - \alpha(n-1) + 1)^{n-2}.$$

A partir destes polinômios, basta aplicar o Teorema IV.8 no grafo G, tal que $R(G) = [n_1, n_2]$, e obtemos,

$$\begin{aligned} p_{A_\alpha}(G, x) &= (x - n_1 + 1)(x - \alpha n_1 + 1)^{n_1 - 1}(x - n_2 + 2)(x - \alpha(n_2 - 1) + 1)^{n_2 - 2} \\ &+ (x - n_2 + 1)(x - \alpha n_2 + 1)^{n_2 - 1}(x - n_1 + 2)(x - \alpha(n_1 - 1) + 1)^{n_1 - 2} \\ &- (x - n_1 + 2)(x - \alpha(n_1 - 1) + 1)^{n_1 - 2}(x - n_2 + 2)(x - \alpha(n_2 - 1) + 1)^{n_2 - 2}, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Capítulo V Resultados obtidos

Neste capítulo investigamos o espectro da matriz A_α para algumas operações em grafos definidas em [Vaidya e Lekha, 2010], [Sidorenko, 1987], [Sampathkumar e Walikar, 1981] e [Belardo *et al.*, 2010]. Destacamos que os resultados aqui apresentados são de nossa autoria e os resultados das Seções V.1, V.2 e V.3 foram publicados em [Junior *et al.*, 2023b] e [Junior *et al.*, 2023a].

V.1 Operação *shadow*

Nesta seção, apresentamos a definição de grafo *shadow* de um grafo, definido em [Vaidya e Lekha, 2010], e fazemos um estudo acerca do seu A_α-espectro. Esta operação é um caso particular da operação *blow-up*, definida na Seção V.2, e todos os resultados obtidos para o grafo *shadow*, serão generalizados para o grafo *blow-up*.

Definição V.1. Seja G um grafo de ordem n, o grafo *shadow* de G, de ordem $2n$, denotado por $D_2(G)$, é obtido tomando duas cópias de G, denotadas por $G^{[1]}$ e $G^{[2]}$, tal que cada vértice $v_i^{[2]} \in V(G^{[2]})$ é adjacente à $v_j^{[1]} \in V(G^{[1]})$ sempre que $\{v_i, v_j\} \in E(G)$.

A Figura V.1 ilustra o grafo C_4 e seu grafo *shadow*, $D_2(C_4)$.

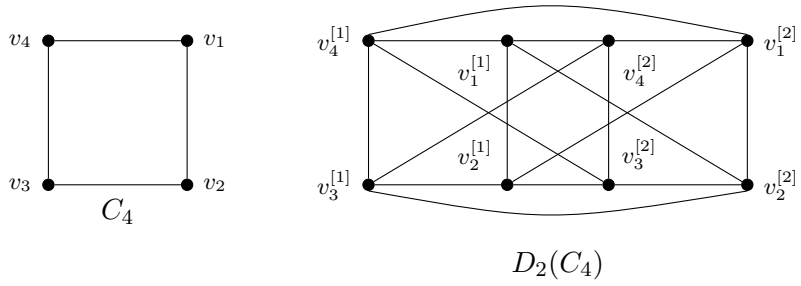


Figura V.1: C_4 e $D_2(C_4)$

A partir da definição do grafo *shadow*, vemos que para todos $v_i^{[1]}, v_i^{[2]} \in V(D_2(G))$ $1 \leq i \leq n$, existe $v \in V(G)$ tal que $d(v_i^{[1]}) = d(v_i^{[2]}) = 2d(v)$, desta forma $\delta(D_2(G)) = 2\delta(G)$ e $\Delta(D_2(G)) = 2\Delta(G)$. Além disso, a operação *shadow* preserva algumas propriedades estruturais do grafo, como mostramos na proposição a seguir.

Proposição V.1. *Seja G um grafo de ordem n e tamanho m. As seguintes afirmações são válidas.*

(i) O grafo $D_2(G)$ tem ordem $2n$;

(ii) O grafo $D_2(G)$ tem tamanho $4m$;

(iii) Se G é conexo então $D_2(G)$ é conexo;

(iv) Se G é bipartido então $D_2(G)$ é bipartido.

Demonstração. (i) A partir da definição, é facil ver que $D_2(G)$ é de ordem $2n$.

(ii) Seja m' o tamanho de $D_2(G)$. Sabemos que

$$2m' = \sum_{i=1}^{n} d(v_i^{[1]}) + \sum_{i=1}^{n} d(v_i^{[2]}) = \sum_{i=1}^{n} 2d(v_i) + \sum_{i=1}^{n} 2d(v_i) = 4\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 4(2m) = 8m,$$

ou seja, $m' = 4m$.

(iii) Como G é conexo, dados $u, v \in V(G)$, existe pelo menos um caminho com extremos u e v. Para $D_2(G)$, se u e v estão na mesma cópia de G, então existe caminho com extremos u e v. Caso u e v estejam em cópias diferentes, basta criar um caminho que começa em u, passa por um vizinho da sua cópia e vai até v.

(iv) Suponhamos que G seja bipartido. Sejam $G^{[1]}$ e $G^{[2]}$ as cópias de G que compõem $D_2(G)$, tal que $V(G^{[1]}) = X \cup Y$ e $V(G^{[2]}) = X' \cup Y'$. Assim, $V(D_2(G))$ pode ser particionado em dois subconjuntos $X \cup X'$ e $Y \cup Y'$ tal que as arestas de $D_2(G)$ partem de um vértice em $X \cup X'$ e chegam em vértice de $Y \cup Y'$. Logo $D_2(G)$ é bipartido.

□

A seguir vemos as matrizes de adjacência e de graus dos grafos apresentados na Figura V.1.

$$A(C_4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A(D_2(C_4)) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A(C_4) & A(C_4) \\ A(C_4) & A(C_4) \end{bmatrix},$$

$$D(C_4) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } D(D_2(C_4)) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 2D(C_4) & 0 \\ 0 & 2D(C_4) \end{bmatrix}$$

Podemos observar que $A(D_2(C_4))$ é uma matriz em blocos onde cada bloco é igual a $A(C_4)$. Esse comportamento é natural se rotularmos primeiramente os vértices do grafo original e depois os vértices da cópia na mesma ordem. No caso geral, o primeiro bloco da esquerda para a direita, de cima para baixo, se comporta naturalmente como $A(G)$, o segundo bloco diz respeito a como os vértices do grafo original se comportam em relação aos vértices da cópia, o terceiro bloco diz respeito a como os vértices da cópia se comportam em relação aos vértices do grafo original e o quarto bloco diz respeito a como os vértices da cópia se comportam em relação aos seus próprios vértices. Assim, para o caso geral em que G é um grafo qualquer, temos que

$$A(D_2(G)) = \begin{bmatrix} A(G) & A(G) \\ A(G) & A(G) \end{bmatrix}$$

e a matriz diagonal dos graus é dada por

$$D(D_2(G)) = \begin{bmatrix} 2D(G) & 0 \\ 0 & 2D(G) \end{bmatrix}.$$

Logo, a matriz $A_\alpha(D_2(G))$ é dada por

$$A_\alpha(D_2(G)) = \begin{bmatrix} 2\alpha D(G) + (1-\alpha)A(G) & (1-\alpha)A(G) \\ (1-\alpha)A(G) & 2\alpha D(G) + (1-\alpha)A(G) \end{bmatrix}.$$

Os próximos resultados envolvem o espectro da matriz $A_\alpha(D_2(G))$.

Teorema V.1. *Se G é um grafo de ordem n e $\alpha \in [0,1]$, então*

$$\text{Spec}(D_2(G)) = \{2\lambda_i(A_\alpha(G)), 2\alpha d(v_i); 1 \leq i \leq n\}.$$

Demonstração. Observemos que $A_\alpha(D_2(G))$ tem a forma $\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$ e assim, pela Proposição II.2,

os autovalores de $A_\alpha(D_2(G))$ são os das matrizes

$$2\alpha D(G) + (1-\alpha)A(G) + (1-\alpha)A(G) = 2\alpha D(G) + 2(1-\alpha)A(G) = 2A_\alpha(G) \text{ e}$$
$$2\alpha D(G) + (1-\alpha)A(G) - (1-\alpha)A(G) = 2\alpha D(G).$$

Portanto, o resultado segue. □

Como consequência do Teorema V.1 temos o seguinte corolário.

Corolário V.2. *Se G é um grafo de ordem n e $\alpha \in [0,1]$, então*

$$p_{A_\alpha}(D_2(G), x) = p_{A_\alpha}(G, x/2)\prod_{i=1}^{n}(x - 2\alpha d(v_i)).$$

Em particular,

$$\lambda_n(A_\alpha(D_2(G))) = 2\lambda_n(A_\alpha(G)).$$

Demonstração. Como consequência do Teorema V.1 temos o espectro de $A_\alpha(D_2(G))$ e consequentemente $p_{A_\alpha}(D_2(G), x)$. Pela Equação (III.13), temos que $\lambda_n(A_\alpha(G)) < \alpha\delta(D_2(G)) = 2\alpha\delta(G)$. Portanto, $\lambda_n(A_\alpha(D_2(G))) = 2\lambda_n(A_\alpha(G))$. □

Como aplicação do Corolário V.2 e das Proposições III.33 e III.34, explicitamos o polinômio característico de $A_\alpha(D_2(K_n))$ e $A_\alpha(D_2(K_{p,q}))$, no Exemplo V.1.

Exemplo V.1. *Das Proposições III.33 e III.34, temos*

$$p_{A_\alpha}(D_2(K_n), x) = (x - 2(n+1))\,(x - \alpha 2(n+1))^{n-1}\,[x - 2\alpha(n-1)]^n$$

e

$$p_{A_\alpha}(D_2(K_{p,q}), x) =$$

$$(x - 2\alpha p)^{2q-1}\,(x - 2\alpha q)^{2p-1}\left(x^2 - 2\alpha(p+q)x + \alpha^2(p+q)) - (\alpha^2(p+q)^2 + 4pq(1-2\alpha)\right).$$

Como consequência do Corolário V.2 temos as seguintes observações.

Observação V.1. *Se $\alpha \in [0,1]$, para que a matriz $A_\alpha(D_2(G))$ seja positiva semidefinida é necessário e suficiente que a matriz $A_\alpha(G)$ também o seja.*

A seguir, introduzimos uma notação para o grafo *shadow* de ordem ℓ, que é obtido do grafo original após a operação *shadow* ser aplicada ℓ vezes.

(i) Seja $D_2^1(G) = D_2(G)$;

(ii) Para $\ell \geq 2$, $D_2^{\ell+1}(G) = D_2(D_2^\ell(G))$.

Observação V.2. *Se G é um grafo e $D_2^\ell(G) = D_2^\ell$, então* $\alpha_0(G) = \alpha_0(D_2) = \alpha_0(D_2^2) = \ldots = \alpha_0(D_2^\ell)$.

V.2 Operação *blow-up*

Nesta seção, estudamos as propriedades espectrais da matriz A_α do grafo obtido a partir da operação *blow-up* cuja definição foi dada inicialmente em [Sidorenko, 1987]. Os autovalores deste grafo e de seu grafo complementar para as matrizes de adjacência e laplaciana sem sinal, já foram determinados na literatura, como pode ser visto em [Nikiforov, 2006] e [Lima *et al.*, 2016]. Os autores em [Lima *et al.*, 2016] usaram a operação *blow-up* para avaliar o comportamento assintótico do valor máximo do autovalor $\lambda_n(Q(G)) = 2\lambda_n(A_{1/2}(G))$ para grafos livres de subgrafos completos de ordem $r+1$.

Definição V.2. Dado um grafo G com $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e um vetor $\mathbf{m} = [m_1, \ldots, m_n]$ de inteiros positivos, denotamos por $G \circ \mathbf{m}$ o grafo obtido de G trocando cada vértice $v_i \in V(G)$ por um conjunto independente de m_i vértices $v_i^1, v_i^2, \ldots, v_i^{m_i}$ e $\{v_i^s, v_j^p\} \in E(G \circ \mathbf{m})$ se e somente se $\{v_i, v_j\} \in E(G)$. O grafo $G \circ \mathbf{m}$ é chamado de *blow-up* de G. Denotamos o grafo $G \circ \mathbf{m}$ por $G^{(t)}$ quando $m_i = m_j$, onde $1 \leq i, j \leq n$.

A Figura V.2 mostra os *blow-ups* $P_3 \circ \mathbf{m}$, onde $\mathbf{m} = [3, 4, 2]$ e $G = P_3^{(2)}$; os retângulos tracejados mostram a influência do vetor $\mathbf{m}$ na operação.

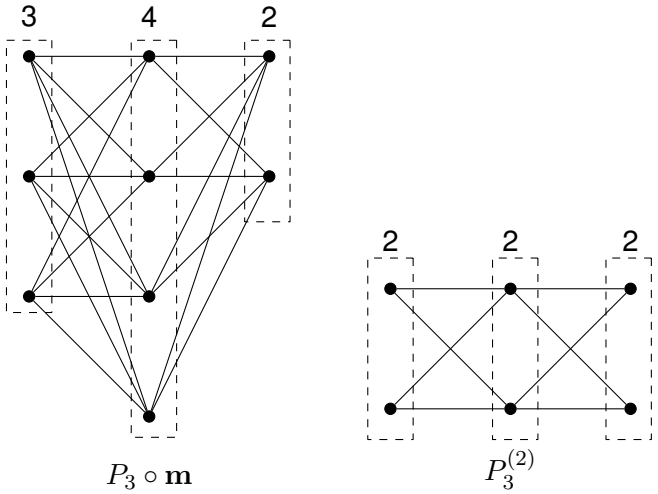


Figura V.2: Grafos *blow-up*

Nesta seção, estudamos os *blow-ups* do tipo $G^{(t)}$. É possível observar que dado um grafo G, $D_2(G)$ é isomorfo à $G^{(2)}$. Ou seja, a operação *blow-up* generaliza a operação *shadow*. Além disso, o *blow-up* de um grafo G de ordem n, $G \circ \mathbf{m}$, onde $\mathbf{m} = [m_1, \ldots, m_n]$, é um caso particular do H-*join* quando tomamos $H = G$ e $\mathcal{F} = \{m_1K_1, \ldots, m_nK_1\}$. Em [Cardoso *et al.*, 2022], os autores expressaram os autovalores da operação H-*join* da matriz de adjacência universal, que generaliza

a A_α, utilizando a matriz cadeia e autovalores principais do grafo. Nesta seção, investigamos o A_α-espectro do *blow-up* do tipo $G^{(t)}$ utilizando outra técnica de demonstração através do produto de Kronecker, além de explicitar o A_α-espectro do grafo complementar da operação *blow-up*.

A partir da definição do grafo *blow-up*, vemos que para todos $v_i^1, v_i^2, \ldots, v_i^t \in G^{(t)}, 1 \leq i \leq n$ existe $v_i \in V(G)$ tal que $d(v_i^1) = d(v_i^2) = \cdots = d(v_i^t) = td(v_i)$, desta forma $\delta(G^{(t)}) = t\delta(G)$ e $\Delta(G^{(t)}) = t\Delta(G)$. Além disso, a proposição a seguir fornece algumas propriedades estruturais do grafo *blow-up*.

Proposição V.2. *Seja G um grafo de ordem n e tamanho m. As seguintes afirmações são válidas.*

(i) Para $t \geq 1$, $G^{(t)}$ tem ordem tn;

(ii) Para $t \geq 1$, $G^{(t)}$ tem tamanho mt^2;

(iii) Se G é conexo então $G^{(t)}$ é conexo;

(iv) Se G é bipartido então $G^{(t)}$ é bipartido.

Demonstração. (i) A partir da definição, é facil ver que $G^{(t)}$ é de ordem tn.

(ii) Seja m' o tamanho de $G^{(t)}$. Sabemos que

$$\begin{aligned} 2m' &= \sum_{i=1}^{n} d(v_i^1) + \sum_{i=1}^{n} d(v_i^2) + \cdots + \sum_{i=1}^{n} d(v_i^t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} td(v_i) + \sum_{i=1}^{n} td(v_i) + \cdots + \sum_{i=1}^{n} td(v_i) \\ &= t(\sum_{i=1}^{n} td(v_i)) = t^2 \sum_{i=1}^{n} d(v_i) = t^2 2m = 2mt^2, \end{aligned}$$

ou seja, $m' = mt^2$.

(iii) Como G é conexo, dados $u, v \in V(G)$, existe pelo menos um caminho com extremos u e v. Para $G^{(t)}$, se u e v estão na mesma cópia de G, então existe caminho com extremos u e v. Caso u e v estejam em cópias diferentes, basta criar um caminho que começa em u, passa por um vizinho da sua cópia e vai até v.

(iv) Suponhamos que $G = (V, E)$ seja bipartido. Logo $V = X \cup Y$ tal que $X \cap Y = \emptyset$. Sejam $G^{[1]}, G^{[2]}, \ldots, G^{[t]}$ as cópias de G que compõem $G^{(t)}$, tal que $V(G^{[1]}) = X^{(1)} \cup Y^{(1)}, V(G^{[2]}) = X^{(2)} \cup Y^{(2)}, \ldots, V(G^{[t]}) = X^{(t)} \cup Y^{(t)}$. Assim, $V(G^{(t)})$ pode ser particionado em dois subconjuntos $\overline{X} = X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup \cdots \cup X^{(t)}$ e $\overline{Y} = Y^{(1)} \cup Y^{(2)} \cup \cdots \cup Y^{(t)}$ tal que $\overline{X} \cap \overline{Y} = \emptyset$ e cada aresta de $G^{(t)}$ incide em um vértice de $\overline{X}$ e em um vértice de $\overline{Y}$, respectivamente.

□

Exemplo V.2. *Na Figura V.3 exibimos o grafo bipartido completo $K_{1,3}$ e seu blow-up $K_{1,3}^{(2)}$. É possível ver como o grafo se comporta após a operação, em relação a propriedade de ser bipartido quando o grafo base é bipartido.*

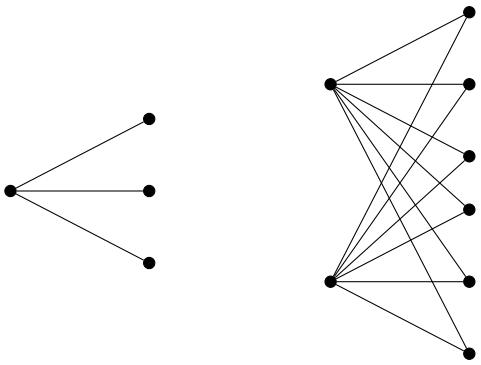


Figura V.3: Grafos $K_{1,3}$ e $K_{1,3}^{(2)}$, respectivamente.

Seja G um grafo de ordem n. Rotulando primeiramente os vértices v_i^1, com $1 \leq i \leq n$ da primeira cópia de G, em seguida os vértices v_i^2 da segunda cópia de G, e assim por diante, teremos no bloco da linha i, coluna j da matriz de adjacência de $G^{(t)}$ um bloco que diz respeito a como a i-ésima cópia de G se comporta em relação à sua j-ésima cópia. Desta forma, $A(G^{(t)})$ é dada por

$$A\left(G^{(t)}\right) = \begin{bmatrix} A(G) & A(G) & \cdots & A(G) \\ A(G) & A(G) & \cdots & A(G) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A(G) & A(G) & \cdots & A(G) \end{bmatrix} = J_t \otimes A(G).$$

A partir da matriz de adjacência do grafo *blow-up*, vemos que os graus de $G^{(t)}$ são iguais aos graus do grafo original multiplicados por t, logo a matriz dos graus de $G^{(t)}$ é dada por

$$D\left(G^{(t)}\right) = \begin{bmatrix} tD(G) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & tD(G) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & tD(G) \end{bmatrix} = tI_t \otimes D(G).$$

Consequentemente, a matriz $A_\alpha(G^{(t)})$ é dada por

$$A_\alpha\left(G^{(t)}\right) = \alpha t I_t \otimes D(G) + (1-\alpha) J_t \otimes A(G).$$

Sabemos que dado um grafo G, temos $A(G) + A(\overline{G}) = A(K_n) = J_n - I_n$. Logo, para o grafo

complementar de $G^{(t)}$, obtemos

$$A\left(\overline{G^{(t)}}\right) = \begin{bmatrix} J_n - I_n - A(G) & J_n - A(G) & \cdots & J_n - A(G) \\ J_n - A(G) & J_n - I_n - A(G) & \cdots & J_n - A(G) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_n - A(G) & J_n - A(G) & \cdots & J_n - I_n - A(G) \end{bmatrix} = J_t \otimes J_n - I_t \otimes I_n - J_t \otimes A(G).$$

Utilizando o Teorema II.14, podemos reescrever $A_\alpha(\overline{G^{(t)}})$ da seguinte maneira:

$$A(\overline{G^{(t)}}) = J_t \otimes (J_n - A(G)) - I_t \otimes I_n.$$

Além disso, a matriz dos graus de $\overline{G^{(t)}}$ é dada por

$$D\left(\overline{G^{(t)}}\right) = \begin{bmatrix} (tn-1)I_n - tD(G) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (tn-1)I_n - tD(G) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (tn-1)I_n - tD(G) \end{bmatrix} = I_t \otimes ((tn-1)I_n - tD(G)).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A_\alpha(\overline{G^{(t)}}) &= \alpha D(\overline{G^{(t)}}) + (1-\alpha)A(\overline{G^{(t)}}) \\ &= I_t \otimes [\alpha t(nI_n - D(G)) - I_n] + (1-\alpha)J_t \otimes (A(\overline{G})). \end{aligned}$$

O próximo teorema descreve o espectro das matrizes $A_\alpha(G^{(t)})$ e $A_\alpha(\overline{G^{(t)}})$.

Teorema V.3. *Se G é um grafo de ordem n e $\alpha \in [0,1]$, então*

$$\begin{aligned} \text{Spec}(G^{(t)}) &= \{t\lambda_i(A_\alpha(G)), [\alpha t d(v_i)]^{[t-1]}; 1 \leq i \leq n\}; \\ \text{Spec}(\overline{G^{(t)}}) &= \{t\lambda_i(A_\alpha(\overline{G})) + t - 1, [\alpha t(n - d(v_i)) - 1]^{t-1}; 1 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

Demonstração. Seja G um grafo de ordem n. Dado um inteiro $t \geq 2$, temos

$$A_\alpha\left(G^{(t)}\right) = \alpha t I_t \otimes D(G) + (1-\alpha)J_t \otimes A(G).$$

Como $A_\alpha(G)$ é uma matriz simétrica, existe uma base ortonormal $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ formada por autovetores de $A_\alpha(G)$, associados, respectivamente, aos autovalores $\lambda_i(A_\alpha(G)), 1 \leq i \leq n$. Para cada i, $1 \leq i \leq n$, consideremos o vetor $j_t \otimes x_i$, onde j_t é o vetor com t entradas iguais a 1. Desta

forma,

$$\begin{aligned} A_\alpha\left(G^{(t)}\right)(j_t \otimes x_i) &= \alpha t j_t \otimes D(G)x_i + (1-\alpha)[J_t j_t \otimes A(G)x_i] \\ &= t j_t \otimes \alpha D(G)x_i + t j_t \otimes (1-\alpha)A(G)x_i \\ &= t j_t \otimes A_\alpha(G)x_i \\ &= t\lambda_i(A_\alpha(G))(j_t \otimes x_i). \end{aligned}$$

Assim, para cada i, $t\lambda_i(A_\alpha(G))$ é um autovalor de $A_\alpha(G^{(t)})$ associado ao autovetor $j_t \otimes x_i$. Agora, seja $p_t^{(i,j)}$ um vetor de ordem t onde a i-ésima entrada é igual a 1, a j-ésima entrada igual a -1, com $i \neq j$ e todas as outras entradas iguais a 0, e, seja $\{y_1, \ldots, y_n\}$ uma base ortonormal de autovetores associados, respectivamente, aos autovalores $\lambda_i(D(G)), 1 \leq i \leq n$. Desta forma,

$$\begin{aligned} A_\alpha(G^{(t)})(p_t^{(i,j)} \otimes y_i) &= \alpha t p_t^{(i,j)} \otimes D(G)y_i + (1-\alpha)[J_t p_t^{(i,j)} \otimes A(G)y_i] \\ &= \alpha t p_t^{(i,j)} \otimes \lambda_i(D(G))y_i \\ &= \alpha t d(v_i)(p_t^{(i,j)} \otimes y_i). \end{aligned}$$

Portanto, para cada i, $1 \leq i \leq n$, $\alpha t d(v_i)$ é autovalor de $A_\alpha(G^{(t)})$ com multiplicidade ao menos $t-1$, pois podemos escolher $p_t^{(i,j)}$ de $t-1$ maneiras diferentes. Para obter o resultado para item (ii), basta aplicar a mesma técnica de prova para $\overline{G^{(t)}}$. □

Exemplo V.3. *Na Figura V.4, exibimos o grafo de Petersen G e seu blow-up $G^{(2)}$.*

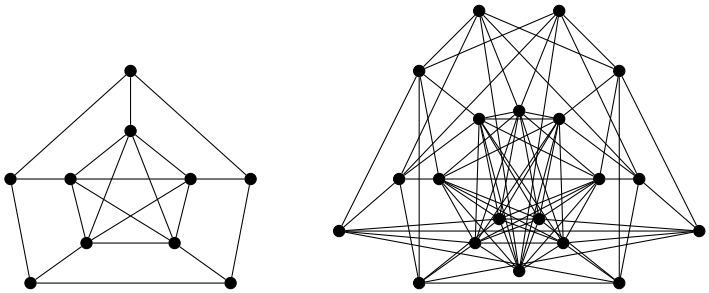


Figura V.4: Grafo de Petersen e seu *blow-up*, respectivamente.

Como o grafo de Petersen é um grafo 3-regular e o espectro da sua matriz de adjacência é dado por $\text{Spec}(A(G)) = \{(-2)^{[4]}, 1^{[5]}, 3\}$*. Desta forma, pela Proposição III.26, concluímos que seu A_α-espectro é dado por* $\text{Spec}(A_\alpha(G)) = \{(5\alpha-2)^{[4]}, (2\alpha+1)^{[5]}, 3\}$ *e, portanto, do Teorema V.1,*

$$\text{Spec}(A_\alpha(G^{(2)})) = \{(10\alpha-4)^{[4]}, (4\alpha+2)^{[5]}, 6, (6\alpha)^{[10]}\}.$$

Exemplo V.4. *Na Figura V.5 exibimos P_3, seu complementar, seu blow-up, e o blow-up do seu*

complementar.

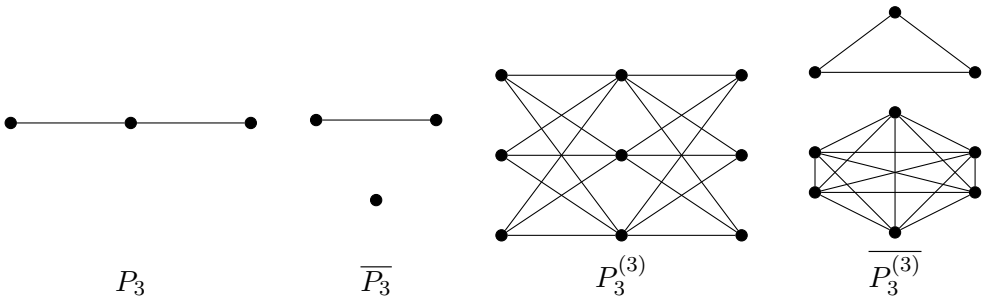


Figura V.5: Grafos blow-up

Sabemos que

$$\begin{aligned} \text{Spec}(A_\alpha(P_3)) &= \left\{\alpha, \frac{1}{2}\left(3\alpha \pm \sqrt{9\alpha^2 - 16\alpha + 8}\right)\right\} \text{ e} \\ \text{Spec}(A_\alpha(\overline{P_3})) &= \{0, 1, 2\alpha - 1\}. \end{aligned}$$

Do Teorema V.3 obtemos

$$\begin{aligned} \text{Spec}\left(A_\alpha\left(P_3^{(3)}\right)\right) &= \left\{(3\alpha)^{[5]}, (6\alpha)^{[2]}, \frac{3}{2}\left(3\alpha \pm \sqrt{9\alpha^2 - 16\alpha + 8}\right)\right\}; \\ \text{Spec}\left(A_\alpha\left(\overline{P_3^{(3)}}\right)\right) &= \left\{2, 5, (6\alpha - 1)^{[5]}, (3\alpha - 1)^{[2]}\right\}. \end{aligned}$$

Como consequência do Teorema V.3 temos o seguinte corolário.

Corolário V.4. *Se G é um grafo de ordem n e $\alpha \in [0, 1]$, então*

$$p_{A_\alpha}(G^{(t)}, x) = p_{A_\alpha}(G, x/t) \prod_{i=1}^{n} (x - t\alpha d(v_i)).$$

Em particular, $\lambda_n(A_\alpha(G^{(t)}) = t\lambda_n(A_\alpha(G))$.

Demonstração. Do Teorema V.3 temos o espectro de $A_\alpha(G^{(t)})$ e, consequentemente, o seu polinômio característico. Da Equação (III.13) obtemos

$$\lambda_n(A_\alpha(G^{(t)})) < \alpha\delta(G^{(t)}) = \alpha t\delta(G) = \alpha t d(v_n).$$

Portanto, $\lambda_n(A_\alpha(G^{(t)})) = t\lambda_n(A_\alpha(G))$. □

Exemplo V.5. *Como consequência do Corolário V.4, podemos explicitar o polinômio característico de $A_\alpha(K_n^{(t)})$ e $A_\alpha(K_{p,q}^{(t)})$. Através das Proposições III.33 e III.34, temos que*

$$p_{A_\alpha}(K_n^{(t)}, x) = \left(x - tn + t\right)\left(x - \alpha tn + t\right)^{n-1}\left(x - \alpha tn - \alpha t\right)^n$$

e

$$p_{A_\alpha}(K_{p,q}^{(t)},x)=\Big(x-\alpha tp\Big)^{2q-1}\Big(x-\alpha tq\Big)^{2p-1}\Big(x^2-\alpha t(p+q)x-\frac{t^2}{4}\alpha^2(p+q)^2+4pq(1-2\alpha)\Big).$$

Em particular,

$$\lambda_n(A_\alpha(K_n^{(t)}))=t(\alpha n-1)\ \ \textit{e}\ \ \lambda_n(A_\alpha(K_{p,q}^{(t)}))=\frac{t}{2}\left[(\alpha(p+q)-\sqrt{\alpha^2(p+q)^2+4pq(1-2\alpha)}\right].$$

Do Corolário V.4 obtemos a observação a seguir.

Observação V.3. *Se $\alpha\in[0,1]$, para que a matriz $A_\alpha(G^{(t)})$ seja positiva semidefinida é necessário e suficiente que $A_\alpha(G)$ também o seja.*

Exemplo V.6. *Na Figura V.6 apresentamos o grafo $\mathcal{H}_3^2$ e o seu blow-up $\mathcal{H}_3^{2(2)}$.*

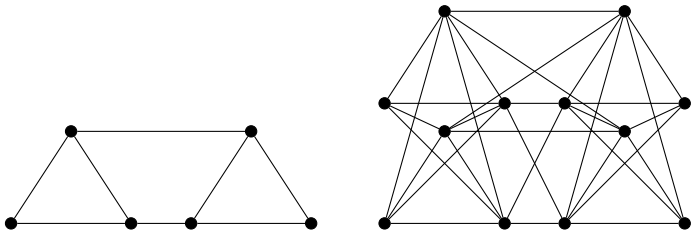


Figura V.6: Grafo $\mathcal{H}_3^2$ e o seu *blow-up* $\mathcal{H}_3^{2(2)}$, respectivamente.

Através da Proposição IV.9, temos que $\alpha_0(\mathcal{H}_3^2)=\frac{2}{5}$. Logo, da Observação V.3, obtemos $\alpha_0(\mathcal{H}_3^{2(2)})=\frac{2}{5}$.

A seguir, introduzimos uma notação para o grafo *blow-up* de ordem ℓ, que é obtido do grafo original após a operação *blow-up* ser aplicada ℓ vezes.

(i) Seja $G_1^{(t)}=G^{(t)}$;

(ii) Para $\ell\geq 2$, $G_{\ell+1}^{(t)}=(G_\ell^{(t)})^{(t)}$.

Com isso temos a seguinte observação.

Observação V.4. *Se G é um grafo então $\alpha_0(G)=\alpha_0(G^{(t)})=\alpha_0(G_2^{(t)})=\cdots=\alpha_0(G_\ell^{(t)})$, para $\ell\geq 1$.*

V.3 Operação *splitting*

Nesta seção apresentamos a definição de grafo *splitting* de um grafo, definida em [Sampathkumar e Walikar, 1981] e resultados do A_α-espectro do *splitting* de um grafo k-regular.

Definição V.3. Seja G um grafo. Para cada vértice v de G, adicionamos um novo vértice v' adjacente a todos os vértices que são vizinhos de v em G. O grafo $S(G)$ assim obtido, é denominado de grafo *splitting* de G.

A Figura V.7 exibe $K_{1,3}$ e $S(K_{1,3})$.

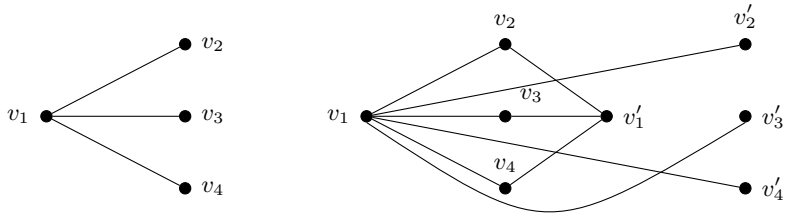


Figura V.7: $K_{1,3}$ e $S(K_{1,3})$, respectivamente.

Proposição V.3. *Seja G um grafo de ordem n e tamanho m. As seguintes afirmações são válidas.*

(i) O grafo $S(G)$ tem ordem $2n$;

(ii) O grafo $S(G)$ tem tamanho $3m$;

(iii) Se G é conexo então $S(G)$ é conexo;

(iv) Se G é bipartido então $S(G)$ é bipartido.

Demonstração. (i) A partir da definição, é facil ver que $S(G)$ é de ordem $2n$.

(ii) Seja m' o tamanho de $S(G)$. Podemos particionar $V(S(G))$ em dois subconjuntos V_1, V_2 de modo que V_1 é o conjunto dos vértices originais de G e V_2 é o conjunto dos novos vértices da definição do grafo *splitting*. Quando $v \in V_1$, existe $u \in V(G)$ tal que $d(v) = 2d(u)$, e quando $v \in V_2$, existe $u \in V(G)$ tal que $d(v) = d(u)$. Desta forma

$$2m' = \sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v) = \sum_{u \in V(G)} 2d(u) + \sum_{u \in V(G)} d(u) = 3 \sum_{u \in V(G)} d(v) = 3(2m) = 6m,$$

ou seja, $m' = 3m$.

(iii) Seja $V(S(G)) = V_1 \cup V_2$ como no item (ii). Como G é conexo, dados $u, v \in V(G)$, existe pelo menos um caminho com extremos u e v. Para $S(G)$, se u e v estão em V_1, então existe caminho com extremos u e v. Caso u e v estejam um em V_1 e outro e em V_2, basta criar um caminho que começa em u, passa por um vizinho da sua cópia e vai até v.

(iv) Seja $V(S(G)) = V_1 \cup V_2$ como no item (ii). Como G é bipartido, $V_1 = X \cup Y$ e $V_2 = X' \cup Y'$ com $X \cap Y = \emptyset$ e $X' \cap Y' = \emptyset$. Desta forma $V(S(G))$ pode ser particionado em dois subconjuntos

$X \cup X'$ e $Y \cup Y'$ tal que as arestas de $S(G)$ partem de um vértice em $X \cup X'$ e chegam em vértice de $Y \cup Y'$. Logo $S(G)$ é bipartido.

□

Para os grafos apresentados na Figura V.7, suas matrizes de adjacência e graus são

$$A(K_{1,3}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } A(S(K_{1,3})) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A(K_{1,3}) & A(K_{1,3}) \\ A(K_{1,3}) & 0 \end{bmatrix};$$

$$D(K_{1,3}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } D(S(K_{1,3})) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 2D(K_{1,3}) & 0 \\ 0 & D(K_{1,3}) \end{bmatrix}.$$

Desta forma, observamos que $A(S(K_{1,3}))$ é uma matriz em blocos onde três blocos são iguais a $A(K_{1,3})$, e um igual a matriz nula. Esse comportamento é natural, pois rotulando primeiramente os vértices do grafo original e depois os vértices novos na mesma ordem. Com isso, vemos que no caso geral o primeiro bloco se comporta naturalmente como $A(G)$, o segundo bloco diz respeito a como os vértices do grafo original se comportam em relação aos vértices novos, o terceiro bloco diz respeito a como os vértices novos se comportam em relação aos vértices do grafo original e o quarto bloco é a matriz nula pois os vértices novos não são adjacentes entre si, por definição. Assim, para o caso geral de $S(G)$ temos

$$A(S(G)) = \begin{bmatrix} A(G) & A(G) \\ A(G) & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$D(S(G)) = \begin{bmatrix} 2D(G) & 0 \\ 0 & D(G) \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$A_\alpha(S(G)) = \begin{bmatrix} 2\alpha D(G) + (1-\alpha)A(G) & (1-\alpha)A(G) \\ (1-\alpha)A(G) & \alpha D(G) \end{bmatrix}.$$

Teorema V.5. *Se G é um grafo k-regular de ordem n e $\alpha \in [0,1]$, então*

$$\text{Spec}(S(G)) = \left\{ \frac{3\alpha k + \lambda_i(A(G))(1-\alpha) \pm \beta_i}{2};\ 1 \leq i \leq n \right\},$$

onde $\beta_i = \sqrt{\alpha^2 k^2 + 2k\alpha(1-\alpha)\lambda_i(A(G)) + 5(1-\alpha)^2\lambda_i^2(A(G))}$ para $1 \leq i \leq n$.

Demonstração. Seja $A(G) = A$. Como G é k-regular de ordem n, para $\alpha \in [0,1]$, $A_\alpha(S(G))$ pode ser escrita da seguinte maneira

$$A_\alpha(S(G)) = \begin{bmatrix} 2\alpha k I_n + (1-\alpha)A & (1-\alpha)A \\ (1-\alpha)A & \alpha k I_n \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} p_{A_\alpha}(S(G), x) = \det(xI_{2n} - A_\alpha(S(G))) &= \det \begin{bmatrix} xI - 2\alpha k I_n - (1-\alpha)A & -(1-\alpha)A \\ -(1-\alpha)A & xI_n - \alpha k I_n \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} (x - 2\alpha k)I_n - (1-\alpha)A & -(1-\alpha)A \\ -(1-\alpha)A & (x-\alpha k)I_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema II.8, obtemos que

$$\begin{aligned} p_{A_\alpha}(S(G), x) &= \det(((x-2\alpha k)I_n - (1-\alpha)A)((x-\alpha k)I_n) - (1-\alpha)^2A^2) \\ &= \det((x-2\alpha k)(x-\alpha k)I_n - (x-\alpha k)(1-\alpha)A - (1-\alpha)^2A^2) \\ &= \det((x^2 - \alpha kx - 2\alpha kx + 2\alpha^2k^2)I_n + (-(1-\alpha)x + (1-\alpha)\alpha k)A - (1-\alpha)^2A^2) \\ &= \det((x^2 - 3\alpha kx + 2\alpha^2k^2)I + (-(1-\alpha)x + (1-\alpha)\alpha k)A - (1-\alpha)^2A^2). \end{aligned}$$

Como $xI_{2n} - A_\alpha(S(G))$ é diagonalizável, $\det(xI_{2n} - A_\alpha(S(G))) = \prod_{i=1}^n \lambda_i(xI_{2n} - A_\alpha(S(G)))$. É fácil ver que se λ é autovalor de A, $\lambda + \mu + \lambda^2$ é autovalor de $A + \mu I_n + A^2$. Desta forma,

$$\begin{aligned} \lambda_i(xI_{2n} - A_\alpha(S(G))) &= \lambda_i((x^2 - 3\alpha kx + 2\alpha^2k^2)I_n + (-(1-\alpha)x + (1-\alpha)\alpha k)A - (1-\alpha)^2A^2) \\ &= x^2 - 3\alpha kx + 2\alpha^2k^2 + (-(1-\alpha)x + (1-\alpha)\alpha k)\lambda_i(A) - (1-\alpha)^2\lambda_i^2(A) \end{aligned}$$

e assim,

$$p_{A_\alpha}(S(G),x)=\prod_{i=1}^{n}\Big(x^2-3\alpha kx+2\alpha^2k^2+(-(1-\alpha)x+(1-\alpha)\alpha k)\lambda_i(A)-(1-\alpha)^2\lambda_i^2(A)\Big).$$

Este polinômio característico tem suas raízes dadas por

$$\frac{3\alpha k+\lambda_i(A)(1-\alpha)\pm\sqrt{\alpha^2k^2+2k\alpha(1-\alpha)\lambda_i(A)+5(1-\alpha)^2\lambda_i^2(A)}}{2},$$

as quais são autovalores de $A_\alpha(S(G))$ para cada $i, 1\leq i\leq n$. Assim obtemos o resultado. □

A partir do Teorema V.5 podemos calcular os autovalores da matriz $A_\alpha(S(G))$ de alguns grafos conhecidos de maneira simples.

Exemplo V.7. *Neste exemplo explicitamos o polinômio característico da matriz A_α dos grafos K_n e $K_{p,p}$. Os A-espectros destes grafos são dados pelas Proposições III.33 e III.34, fazendo $\alpha=0$, os quais são*

$$\text{Spec}(A(K_n))=\{n-1,-1^{(n-1)}\},\quad \textit{e}\ \text{Spec}(A(K_{p,p}))=\{p,-p,0^{(n-2)}\}.$$

Assim,

$$p_{A_\alpha}(S(K_n),x)=\prod_{i=1}^{n}\Big(x^2-3\alpha(n-1)x+2\alpha^2(n-1)^2+(1-\alpha)(-x+\alpha n-1)\lambda_i(A)-(1-\alpha)^2\lambda_i^2(A)\Big)$$

e

$$p_{A_\alpha}(S(K_{p,p}),x)=\prod_{i=1}^{n}\Big(x^2-3\alpha px+2\alpha^2p^2+(-(1-\alpha)x+(1-\alpha)\alpha p)\lambda_i(A)-(1-\alpha)^2\lambda_i^2(A)\Big).$$

Exemplo V.8. *Na Figura V.8 temos o grafo completo K_4 e seu grafo splitting.*

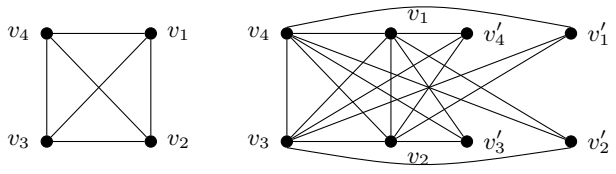


Figura V.8: K_4 e $S(K_4)$

Do Teorema V.5, temos

$$p(A_\alpha(S(G)),x)=\prod_{i=1}^{n}\Big(x^2-3\alpha kx+2\alpha^2k^2+(-(1-\alpha)x+(1-\alpha)\alpha k)\lambda_i(A)-(1-\alpha)^2\lambda_i^2(A)\Big).$$

Como Spec$(A(K_4)) = \{3, (-1)^{[3]}\}$*, conclui-se que*

$$p(A_\alpha(S(K_4)), x) = \left[x^2 - 3x(2\alpha - 1) + 27\alpha - 9\right]\left[x^2 - (10\alpha + 1)x + 20\alpha^2 - \alpha - 1\right]^3.$$

Portanto,

$$\text{Spec}(A_\alpha(S(K_4))) = \left\{\frac{3}{2}\left(2\alpha - 1 \pm \sqrt{4\alpha^2 - 16\alpha + 5}\right), \left(\frac{10\alpha + 1 \pm \sqrt{20\alpha^2 + 24\alpha + 5}}{2}\right)^{[3]}\right\}.$$

V.4 Grafo *block-indifference*

Em [Brondani *et al.*, 2022], temos explícito o polinômio característico da matriz A_α do grafo *block-indifference* para duas cliques podendo ter ordens diferentes. Nesta seção, investigamos o A_α-espectro do grafo *block-indifference* com três ou mais cliques, de mesma ordem, com ordem maior ou igual a três.

Se $G \simeq R_k[p]$ é um grafo do tipo *block-indifference* formado por k cliques de ordem p, com $k \geq 2$ e $p \geq 3$, a ordem e o tamanho de G são dados por, respectivamente

$$\begin{aligned} n &= p + (p-1) + (p-1) + \cdots + (p-1) = kp - (k-1) = k(p-1) + 1 \\ m &= \frac{kp(p-1)}{2}. \end{aligned}$$

Na Figura V.9 ilustramos um exemplo de grafo *block-indifference*.

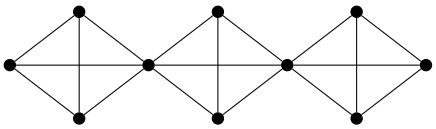


Figura V.9: Grafo $R_3[4]$

O Teorema V.6 apresenta uma parte do espectro da matriz A_α de $R_k[p]$.

Teorema V.6. *Seja* $\alpha \in [0, 1]$*. Se* $G \simeq R_k[p]$*, onde* $k \geq 2$ *e* $p \geq 3$*, então* $\alpha p - 1$ *é autovalor de* $A_\alpha(G)$ *com multiplicidade igual a pelo menos* $k(p-3) + 2$*.*

Demonstração. Seja $G \simeq R_k[p]$ onde $k \geq 2$ e $p \geq 3$. Podemos observar que G tem a seguinte

quantidade de vértices gêmeos verdadeiros

$$\begin{aligned}
&[(p-1)-1]+(k-2)\,[(p-2)-1]+[(p-1)-1]= \\
&=2(p-2)+(k-2)(p-3) \\
&=2p-4+(k-2)(p-3) \\
&=2p-4+kp-2p-3k+6 \\
&=kp-3k+2=k(p-3)+2.
\end{aligned}$$

Desta forma, pela Proposição III.27, $\alpha p-1$ é autovalor de $A_\alpha(G)$ com multiplicidade igual a pelo menos $k(p-3)+2$, e obtemos o resultado. □

Como o grafo $R_k[p]$ tem ordem $k(p-1)+1$, faltam $k(p-1)+1-k(p-3)-2=2k-1$ autovalores para serem encontrados, os quais são as raízes do polinômio característico da matriz quociente de $A_\alpha(R_k[p])$, obtida pelo Teorema II.9, a qual denotamos por $M_\alpha(R_k[p])$.

Agora analisemos a matriz $A_\alpha(R_k[p])$. Se rotularmos primeiramente os vértices da primeira clique da esquerda para a direita, rotulando o vértice que faz coalescência com a clique seguinte por último, e continuarmos esse processo por todo o grafo, a matriz de adjacência de $R_k[p]$ é dada por

$$A(R_k[p])=\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c}
J_{p-1}-I_{p-1} & J_{p-1,1} & \mathbf{0}_{p-1,p-2} & \mathbf{0}_{p-1,1} & \cdots & \mathbf{0}_{p-1,1} & \mathbf{0}_{p-1,p-2} & \mathbf{0}_{p-1,1} & \mathbf{0}_{p-1} \\ \hline
J_{1,p-1} & 0 & J_{1,p-2} & 1 & \cdots & 0 & \mathbf{0}_{1,p-2} & 0 & \mathbf{0}_{1,p-1} \\ \hline
\mathbf{0}_{p-2,p-1} & J_{p-2,1} & J_{p-2}-I_{p-2} & J_{p-2,1} & \cdots & \mathbf{0}_{p-2,1} & \mathbf{0}_{p-2} & \mathbf{0}_{p-2,1} & \mathbf{0}_{p-2,p-1} \\ \hline
\mathbf{0}_{1,p-1} & 1 & J_{1,p-2} & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{0}_{1,p-2} & 0 & \mathbf{0}_{1,p-1} \\ \hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline
\mathbf{0}_{1,p-1} & 0 & \mathbf{0}_{1,p-2} & 0 & \cdots & 0 & J_{1,p-2} & 1 & \mathbf{0}_{1,p-1} \\ \hline
\mathbf{0}_{p-2,p-1} & \mathbf{0}_{p-2,1} & \mathbf{0}_{p-2} & \mathbf{0}_{p-2,1} & \cdots & J_{p-2,1} & J_{p-2}-I_{p-2} & J_{p-2,1} & \mathbf{0}_{p-2,p-1} \\ \hline
\mathbf{0}_{1,p-1} & 0 & \mathbf{0}_{1,p-2} & 0 & \cdots & 1 & J_{1,p-2} & 0 & J_{1,p-1} \\ \hline
\mathbf{0}_{p-1} & \mathbf{0}_{p-1,1} & \mathbf{0}_{p-1,p-2} & \mathbf{0}_{p-1,1} & \cdots & \mathbf{0}_{p-1,1} & \mathbf{0}_{p-1,p-2} & J_{p-1,1} & J_{p-1}-I_{p-1}
\end{array}\right].$$

A matriz dos graus de $R_k[p]$ é dada por $D(R_k[p])=$

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c}
(p-1)I_{p-1} & \mathbf{0}_{p-1,1} & \mathbf{0}_{p-1,p-2} & \mathbf{0}_{p-1,1} & \cdots & \mathbf{0}_{p-1,1} & \mathbf{0}_{p-1,p-2} & \mathbf{0}_{p-1,1} & \mathbf{0}_{p-1} \\ \hline
\mathbf{0}_{1,p-1} & 2(p-1) & \mathbf{0}_{1,p-2} & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{0}_{1,p-2} & 0 & \mathbf{0}_{1,p-1} \\ \hline
\mathbf{0}_{p-2,p-1} & \mathbf{0}_{p-2,1} & (p-1)I_{p-2} & \mathbf{0}_{p-2,1} & \cdots & \mathbf{0}_{p-2,1} & \mathbf{0}_{p-2} & \mathbf{0}_{p-2,1} & \mathbf{0}_{p-2,p-1} \\ \hline
\mathbf{0}_{1,p-1} & 0 & \mathbf{0}_{1,p-2} & 2(p-1) & \cdots & 0 & \mathbf{0}_{1,p-2} & 0 & \mathbf{0}_{1,p-1} \\ \hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline
\mathbf{0}_{1,p-1} & 0 & \mathbf{0}_{1,p-2} & 0 & \cdots & 2(p-1) & \mathbf{0}_{1,p-2} & 0 & \mathbf{0}_{1,p-1} \\ \hline
\mathbf{0}_{p-2,p-1} & \mathbf{0}_{p-2,1} & \mathbf{0}_{p-2} & \mathbf{0}_{p-2,1} & \cdots & \mathbf{0}_{p-2,1} & (p-1)I_{p-2} & \mathbf{0}_{p-2,1} & \mathbf{0}_{p-2,p-1} \\ \hline
\mathbf{0}_{1,p-1} & 0 & \mathbf{0}_{1,p-2} & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{0}_{1,p-2} & 2(p-1) & \mathbf{0}_{1,p-1} \\ \hline
\mathbf{0}_{p-1} & \mathbf{0}_{p-1,1} & \mathbf{0}_{p-1,p-2} & \mathbf{0}_{p-1,1} & \cdots & \mathbf{0}_{p-1,1} & \mathbf{0}_{p-1,p-2} & \mathbf{0}_{p-1,1} & (p-1)I_{p-1}
\end{array}\right],$$

Consequentemente, a matriz $A_\alpha(R_k[p])$ é dada por

$A_\alpha(R_k[p]) =$

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c}
A_\alpha(K_{p-1}) + \alpha I_{p-1} & (1-\alpha)J_{p-1,1} & \mathbf{0}_{p-1,p-2} & \mathbf{0}_{p-1,1} & \cdots & \mathbf{0}_{p-1,1} & \mathbf{0}_{p-1,p-2} & \mathbf{0}_{p-1,1} & \mathbf{0}_{p-1} \\
\hline
(1-\alpha)J_{1,p-1} & 2\alpha(p-1) & (1-\alpha)J_{1,p-2} & 1-\alpha & \cdots & 0 & \mathbf{0}_{1,p-2} & 0 & \mathbf{0}_{1,p-1} \\
\hline
\mathbf{0}_{p-2,p-1} & (1-\alpha)J_{p-2,1} & A_\alpha(K_{p-2}) + 2\alpha I_{p-1} & (1-\alpha)J_{p-2,1} & \cdots & \mathbf{0}_{p-2,1} & \mathbf{0}_{p-2} & \mathbf{0}_{p-2,1} & \mathbf{0}_{p-2,p-1} \\
\hline
\mathbf{0}_{1,p-1} & 1-\alpha & (1-\alpha)J_{1,p-2} & 2\alpha(p-1) & \cdots & 0 & \mathbf{0}_{1,p-2} & 0 & \mathbf{0}_{1,p-1} \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
\mathbf{0}_{1,p-1} & 0 & \mathbf{0}_{1,p-2} & 0 & \cdots & 2\alpha(p-1) & (1-\alpha)J_{1,p-2} & 1-\alpha & \mathbf{0}_{1,p-1} \\
\hline
\mathbf{0}_{p-2,p-1} & \mathbf{0}_{p-2,1} & \mathbf{0}_{p-2} & \mathbf{0}_{p-2,1} & \cdots & (1-\alpha)J_{p-2,1} & A_\alpha(K_{p-2}) + 2\alpha I_{p-1} & (1-\alpha)J_{p-2,1} & \mathbf{0}_{p-2,p-1} \\
\hline
\mathbf{0}_{1,p-1} & 0 & \mathbf{0}_{1,p-2} & 0 & \cdots & 1-\alpha & (1-\alpha)J_{1,p-2} & 2\alpha(p-1) & (1-\alpha)J_{1,p-1} \\
\hline
\mathbf{0}_{p-1} & \mathbf{0}_{p-1,1} & \mathbf{0}_{p-1,p-2} & \mathbf{0}_{p-1,1} & \cdots & \mathbf{0}_{p-1,1} & \mathbf{0}_{p-1,p-2} & (1-\alpha)J_{p-1,1} & A_\alpha(K_{p-1}) + \alpha I_{p-1}
\end{array}\right].$$

Consequentemente, $M_\alpha(R_k[p])$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \alpha+p-2 & 1-\alpha & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ (1-\alpha)(p-1) & 2\alpha(p-1) & (1-\alpha)(p-2) & 1-\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 2\alpha+p-3 & 1-\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-\alpha & (1-\alpha)(p-2) & \alpha(2(p-1)) & (1-\alpha)(p-2) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\alpha & 2\alpha+p-3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+p-2 \end{bmatrix}.$$

Para o caso em que $k \geq 3$, $M_\alpha(R_k[p])$ é uma matriz de ordem $q = 2k-1$, que pode ser construída como segue. Seja L_i a i-ésima linha de $M_\alpha(R_k[p])$.

- $L_1 = \begin{bmatrix} \alpha+p-2 & 1-\alpha & \mathbf{0}_{1,q-2} \end{bmatrix}$;
- $L_2 = \begin{bmatrix} (1-\alpha)(p-1) & 2\alpha(p-1) & (1-\alpha)(p-2) & 1-\alpha & \mathbf{0}_{1,q-4} \end{bmatrix}$;

Para $3 \leq i \leq \lceil \frac{q}{2} \rceil$, se $i = 2r+1$, onde r é um inteiro maior ou igual a 1, temos

- $L_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1,2r-1} & 1-\alpha & 2\alpha+p-3 & 1-\alpha & \mathbf{0}_{1,q-2r-4} \end{bmatrix}$;

Se $i = 2r$, onde r é um inteiro maior ou igual a 1,

- $L_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1,\frac{r}{2}} & 1-\alpha & (1-\alpha)(p-2) & 2\alpha(p-1) & (1-\alpha)(p-2) & 1-\alpha & \mathbf{0}_{1,q-\frac{r}{2}-4} \end{bmatrix}$;

Para $\lceil \frac{q}{2} \rceil \leq i \leq q$,

- $a_{n-i,j} = a_{i+1,n-j}$.

Com isso, podemos observar que, à medida em que o k cresce, a ordem de $M_\alpha(R_k[p])$ aumenta e consequentemente não conseguimos explicitar os autovalores que estão faltando da matriz $A_\alpha(R_k[p])$. A seguir apresentamos o Corolário V.7 que explicita o polinômio característico de $A_\alpha(R_3[p])$.

Corolário V.7. *Seja $G \simeq R_3[p]$ com $p \geq 3$. Se $\alpha \in [0,1]$, o polinômio característico de $A_\alpha(G)$ é dado por*

$$p_{A_\alpha}(G,x) = (\alpha p-1)^{3(p-3)+2} f(x),$$

onde $f(x)$ é o polinômio característico da matriz $M_\alpha(G)$, dado pela seguinte expressão

$f(x) = x^5+(-4\alpha p-3p+7)x^4+(-2\alpha^2+4\alpha^2p^2+12\alpha p^2+3p^2+4\alpha^2p-24\alpha p-18p+21)x^3+(-6\alpha^2-4\alpha-12\alpha^2p^3-12\alpha p^3-p^3-8\alpha^3p^2+12\alpha^2p^2+56\alpha p^2+15p^2+4\alpha^3p+18\alpha^2p-52\alpha p-45p+35)x^2+(2\alpha^3-7\alpha^2-12\alpha+12\alpha^2p^4+4\alpha p^4+16\alpha^3p^3-36\alpha^2p^3-40\alpha p^3-4p^3+3\alpha^4p^2-26\alpha^3p^2-\alpha^2p^2+92\alpha p^2+28p^2-2\alpha^4p+4\alpha^3p+38\alpha^2p-48\alpha p-56p+33)x+3\alpha^2-14\alpha-4\alpha^2p^5-8\alpha^3p^4+20\alpha^2p^4+8\alpha p^4-3\alpha^4p^3+22\alpha^3p^3-15\alpha^2p^3-40\alpha p^3-4p^3+3\alpha^4p^2-8\alpha^3p^2-29\alpha^2p^2+54\alpha p^2+20p^2-6\alpha^3p+25\alpha^2p-8\alpha p-31p+15.$

Capítulo VI Considerações finais e trabalhos futuros

Neste trabalho, começamos no Capítulo II relembrando conceitos acerca da Teoria de Matrizes e Teoria de Grafos. No Capítulo III estudamos e revisitamos propriedades espectrais das matrizes de adjacência, laplaciana sem sinal e A_α. No Capítulo IV revisamos o estado da arte do tópico referente ao A_α-espectro de operações entre grafos, por fim, no Capítulo V, exploramos algumas propriedades espectrais de quatro operações entre grafos. Começamos estudando o grafo *shadow* de um grafo, exibindo completamente seu A_α-espectro e seu menor autovalor, ambos em função dos autovalores da matriz A_α do grafo original, além de mostrar que podemos aplicar esta operação diversas vezes sem alterar a positividade semidefinida de sua matriz A_α. Estes resultados foram publicados em [Junior *et al.*, 2023b]. Fizemos o mesmo estudo para o grafo *blow-up*, cujos resultados foram publicados em [Junior *et al.*, 2023a]. Para o grafo *splitting* de um grafo regular, exibimos o espectro completo de sua matriz A_α, e estes resultados foram também publicados em [Junior *et al.*, 2023b]. Para os grafos do tipo $R_k[p]$, um caso particular do grafo *block-indifference*, exibimos uma parte do espectro de sua matriz A_α, e propomos uma matriz quociente de sua matriz A_α cuja ordem é exatamente a quantidade de autovalores que faltam e concluímos apresentando um corolário que exibe o polinômio característico dos grafos $R_3[p]$.

A seguir, apresentamos a definição do grafo *pineapple* generalizado.

Definição VI.1. Dados inteiros $q \geq 1$, $p \geq 3$ e $1 \leq r \leq n-2$, o grafo *pineapple* generalizado, denotado por $K_p^{q,r}$ é obtido ligando q novos vértices à uma clique de r vértices de um grafo completo K_p.

Na Figura VI.1, vemos um exemplo de grafo *pineapple* generalizado.

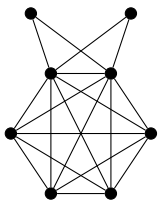


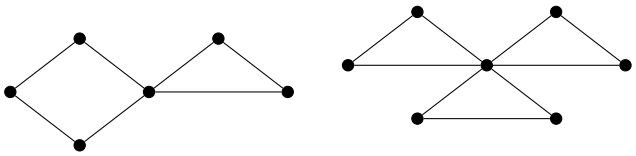
Figura VI.1: Grafo $K_6^{2,2}$.

Para dar continuidade aos nossos trabalhos, pretendemos estudar o *splitting* de G no caso

em que G é um grafo qualquer, explicitar o A_α-espectro do grafo *pineapple* generalizado, além de conseguir mais resultados acerca da ordenação dos autovalores desses grafos. Outra família de grafos da qual pretendemos obter resultados é definida a seguir.

Definição VI.2. Dados inteiros $3 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$ e $k > 2$, seja $F_{a_1,a_2,\ldots,a_k}$ o grafo que consiste em k ciclos de tamanhos $a_1, a_2, \ldots, a_k$, respectivamente, todos eles compartilhando um único vértice.

A Figura VI.2 exibe dois grafos desta família.



$F_{3,4}$ $F_{3,3,3}$

Figura VI.2: Exemplos da família $F_{a_1,a_2,\ldots,a_k}$.

É importante ressaltar que os grafos do tipo $F_{3,3,3}$ são um caso particular do grafo *firefly*, que teve seu A_α-espectro explorado em [Brondani *et al.*, 2019] e os grafos do tipo $F_{4,4,\ldots,4}$ já foram estudados do ponto de vista espectral em relação à sua matriz A_α em [Leal *et al.*, 2023].

Para todos os grafos que obtivemos resultados neste trabalho e os que serão trabalhados futuramente, pretendemos nos aprofundar na investigação que envolve o α_0.

Referências

Abreu, N., Del-Vecchio, R., Stevanović, D., e Vinagre, C. *Introdução à Teoria Espectral de Grafos com Aplicações*. Notas em Matemática Aplicada. SBMAC, 2007.

Aouchiche, M., Hansen, P., e Lucas, C. On the extremal values of the second largest Q-eigenvalue. *Linear Algebra and its Applications*, 435(10):2591–2606, 2011.

Balakrishnan, R. e Ranganathan, K. *A Textbook of Graph Theory*. Springer, New York, 2012.

Belardo, F., Marzi, E. M. L., Simić, S. K., e Wang, J. On the index of necklaces. *Graphs and Combinatorics*, 26:163–172, 2010.

Biggs, N. *Algebraic Graph Theory, 2 ed.* Cambrige University Press, Great Britain, 1993.

Brondani, A., França, F., e Oliveira, C. Positive semidefiniteness of $A_\alpha(G)$ on some families of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 323:113–123, 2022.

Brondani, A. E., Oliveira, C. S., França, F. A. M., e de Lima, L. A_α-spectrum of a firefly graph. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 346:209–219, 2019.

Broxson, B. J. *The Kronecker product*, Dissertação de Mestrado (Mestrado em Ciências Matemáticas) - University of North Florida, Flórida do Norte, 2006.

Cardoso, D. M., Gomes, H., e Pinheiro, S. J. The H-join of arbitrary families of graphs - the universal adjacency spectrum. *Linear Algebra and its Applications*, 648:160–180, 2022.

Cvetković, D., Doob, M., e Sachs, H. *Spectra of Graphs: Theory and Applications*. Johann Ambrosius Barth, 1995.

Cvetković, D. Graphs and their spectra. *Publ. Elektrotehn, Fak., Ser. Mat. Fiz., Univ Beograd, 354*, pages 1–50, 1971.

Cvetković, D. Spectral theory of graphs based on the signless laplacian, 2010.

Cvetković, D., Doob, M., e Sachs, H. *Spectra of Graphs - Theory and Application*. Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York, 1980.

da Silva Jr., J. D. G., Oliveira, C. S., e da Costa, L. M. G. C. On the characteristic polynomial of the A_α-matrix for some operations of graphs, 2022.

de Moraes, P. E., de Abreu, N. M. M., e Jurkiewicz, S. The fifth and sixth coefficients of the characteristic polynomial of a graph. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 11:201–208, 2002.

Godsil, C. e Royle, G. *Algebraic Graph Theory, Graduate texts in Mathematics*. Springer, GTM 207, 2001.

Grone, R. e Zimmerman, C. Large eigenvalues of the laplacian. *Linear and Multilinear Algebra*, 28:45–47, 1990.

Haemers, W. e Omidi, G. Universal adjacency matrices with two eigenvalues. *Linear Algebra and its Applications*, 435, 2010.

Harary, F. *Graph Theory*. Addison-Wesley Plusbling Company, Inc., Philippines, 1969.

Hoffman, A. J. *On Eigenvalues and Colorings of Graphs*, pages 407–419. World Scientific, 2003.

Horn, R. A. e Johnson, C. R. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge; New York, 2nd edition, 2013.

Hückel, E. Quantentheoretische Beiträge zum Benzolproblem. *Zeitschrift fur Physik*, 70(3-4):204–286, 1931.

Junior, U. C. P., Olivera, C. S., e Brondani, A. E. O A_α-espectro do grafo blow-up. *Anais do Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional (ERMAC-RJ) & Simpósio Primeira Década PPG-MCCT.*, 2023a.

Junior, U. C. P., Olivera, C. S., e Brondani, A. E. Um estudo espectral de operações entre grafos. *Anais do Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional.*, 2023b.

Leal, V. M. X., Oliveira, C. S., e Brondani, A. E. A_α-spectral properties of some families of graphs with vertex connectivity equal to 1. *Matemática Contemporânea*, 55:20–29, 2023.

Li, S. e Wang, S. The A_α-spectrum of graph product. *Journal of Linear Algebra*, 35:473–481, 2019.

Lima, L., Nikiforov, V., e Oliveira, C. The clique number and the smallest Q-eigenvalue of graphs. *Discrete Mathematics*, 339:1744–1752, 2016.

Lima, R. G. O. J. *Propriedades A_α-espectrais de Operações em Grafos*, Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em matemática) - Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, 2021.

Lin, H., Xue, J., e Shu, J. On the A_α-spectra of graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 556:210–219, 2018.

Merris, R. *Graph Theory*. JOHN WILEY & SONS, INC., Canada, 2001.

Nath, M. e Paul, S. On the distance laplacian spectra of graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 460:97–110, 2014.

Nikiforov, V. Linear combinations of graph eigenvalues. *Eletronic Journal of Linear Algebra*, 15:329–336, 2006.

Nikiforov, V. Merging the A- and Q-spectral theories. *Appl. Anal. Discrete Math.*, 11:81–107, 2017.

Nikiforov, V., Pastén, G., Rojo, O., e Soto, R. L. On the A_α-spectra of trees. *Linear Algebra Appl.*, 520:286–305, 2017.

Nikiforov, V. e Rojo, O. A note on the positive semidefiniteness of $A_\alpha(G)$. *Linear Algebra and its Applications*, 519:156–163, 2017.

Rojo, O. Computing the $A_\alpha(G)$ eigenvalues of a bug. *arXiv*, 2017. Disponível em: https://arxiv.org/abs/1710.02771. Acesso em: 18 mar. 2024.

Sachs, H. e Lovász, L. Combinatorial problems and exercises. budapest, akademiai kiadó & amsterdam-new york-oxford, north-holland publishing company 1979. 551 s., 122 abb., ft 870.–. isbn 963-05-1469-9. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 60(4):215–215, 1980.

Sampathkumar, E. e Walikar, H. On the splitting graph of a graph. *Journal of the Karnatak University. Science*, 1981.

Sidorenko, A. F. On the maximal number of edges in a homogeneous hypergraph that does not contain prohibited subgraphs. *Mat. Zametki*, 41:433–455, 1987.

Vaidya, S. K. e Lekha, B. New families of odd graceful graphs. *Int. J. Open Problems Compt. Math., Vol. 3, No. 5*, pages 166–171, 2010.