CEFET/RJ
DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

UM PROBLEMA REAL DE LOCALIZAÇÃO DE *HUBS* CAPACITADOS EM UMA EMPRESA DO VAREJO

Ana Carolina Fernandes de Moura

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas, do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, CEFET/RJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de mestre.

Orientador(a): Leonardo Lima
Coorientador(a): Ormeu Coelho

Rio de Janeiro,
Setembro 2019

UM PROBLEMA REAL DE LOCALIZAÇÃO DE *HUBS* CAPACITADOS EM UMA EMPRESA DO VAREJO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas, do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, CEFET/RJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de mestre.

Ana Carolina Fernandes de Moura

Banca Examinadora:

A C Reis

Presidente, Professor D.Sc. Augusto Reis (CEFET/RJ)

P/ A C Reis (Por Videoconferência)

Professor D.Sc. Leonardo Lima (CEFET/RJ) (Orientador(a))

Professor D.Sc. Ormeu Coelho (CEFET/RJ) (Coorientador(a))

Professor D.Sc. Anibal Alberto Ignacio (UFF)

P/ A C Reis (Por Videoconferência)

Professor D. Sc. Gilberto de Miranda Junior (UFMG)

Rio de Janeiro,

Setembro 2019

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central do CEFET/RJ

M929 Moura, Ana Carolina Fernandes de.
Um problema real de localização de hubs capacitados em uma empresa do varejo / Ana Carolina Fernandes de Moura. – 2019.
113f. il.color., grafs. ; enc.

Dissertação (Mestrado) Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, 2019.
Bibliografia: f. 109-113.
Orientador: Leonardo Lima.
Co-orientador: Ormeu Coelho.

1. Distribuição de mercadorias. 2. Logística e transportes. 3. Canais de distribuição – Administração. I. Lima, Leonardo (Orient.). II. Coelho Ormeu Coelho (Co-orient.). III. Título.

CDD 658.78

Elaborada pelo bibliotecário Leandro Mota de Menezes CRB-7/5281

DEDICATÓRIA

Dedico essa e minhas demais conquistas à minha família, especialmente à minha mãe (Ana Beatriz) e à minha avó (Vera Lucia), por estarem presentes em todos os momentos durante toda a minha vida em momentos de alegria, mas também, me apoiando e dando suporte nos momentos difíceis. Agradeço, também, ao meu amigo Alexandre. Vocês foram fundamentais para cada conquista em minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao orientador desse trabalho, Professor Leonardo Lima, por todo o auxílio prestado durante todo o período do curso de mestrado e especialmente por sua competência e acompanhamento durante o desenvolvimento desse trabalho. Muito obrigada também ao coorientador deste trabalho, Professor Ormeu Coelho, pois sua competência, sugestões, correções, incentivos e disponibilidade para discussões foram fundamentais para uma maior aprendizagem sobre o assunto e para o desenvolvimento do trabalho. Agradeço ao CEFET/RJ, ao seu corpo docente, administração, por nos oferecer condições que foram fundamentais em nosso aprendizado, como professores de excelência.

Aos meus amigos e colegas de turma, pelo suporte e companheirismo. Agradeço também aos gestores da empresa foco deste trabalho pela disponibilidade e acompanhamento. A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, obrigada.

RESUMO

Um Problema Real de Localização de *Hubs* Capacitados em Uma Empresa do Varejo

Este trabalho apresenta um estudo de caso de uma empresa do varejo no qual as decisões de projeto da rede de distribuição são modeladas como um Problema de Localização de Facilidades. Ele visa dar suporte ao projeto da empresa de redefinição de sua rede de transporte tendo como objetivo a redução de custos e uma aproximação entre CDs e clientes. São investigados alguns cenários que interessam a empresa, como a utilização de *hubs* como pontos de transbordo e de estoques avançados. O modelo determina o número ótimo de CDs e *hubs*, assim como os fluxos de produtos entre facilidades da rede. Em todos os cenários testados, houve uma redução de custos em relação aos atuais, em que destacam-se dois dos resultados, um cenário com escolha de tamanho dos CDs que representou 11% de economia e uma redução de 202km na distância média de distribuição entre CDs e *hubs* em relação aos dados atuais. O segundo cenário com resultados relevantes foi o que os *hubs* possuíam estoque dos produtos de tecnologia, com a distância média entre estoques destes produtos e clientes de 350 km e dos demais produtos, de 393 km e houve uma redução de custos de 7,1%. Os modelos de Programação Inteira desenvolvidos para representar o problema da empresa foram codificados em *AIMMS* e resolvidos através do CPLEX 12.7.1. Três métodos de resolução foram testados: Decomposição de Benders; *Branch-and-Cut*; e o *Dynamic Search* disponível no CPLEX. Os resultados obtidos sugerem que a versão clássica da Decomposição de Benders apresentou o melhor desempenho computacional e também em termos de qualidade da solução.

Palavras-chave: Varejo; Projeto de redes de distribuição; Localização de *Hubs*; Programação Inteira; Decomposição de Benders

ABSTRACT

A Real Capacitated Hub Location Problem in a Retail Company

This dissertation presents a case study of a retail company in which distribution network design decisions are modeled as a Facility Location Problem. It aims to support a company's project to redefine its transportation network with the objective of reducing costs and approximating DCs and customers. Some scenarios that interest the company are investigated, such as the utilization of hubs as transshipment points and advanced stock. The model determines the optimal number of DCs and hubs, as well as the product flows between network facilities. In every tested scenarios, there was a cost reduction in comparison with the current costs, in which two results stand out, one scenario with DCs size decision that represented an economy of 11% and a reduction of 202km in the average distribution distance between DCs and hubs in comparison with current data. The second scenario with relevant results was the one in which hubs functioned as a stock for products of technology, in which the average distance between stocks of these products and costumers was 350km and 393 km for the others products and it represented an economy of 7.1%. The Integer Programming models developed to represent the company's problem were coded in AIMMS and solved with CPLEX 12.7.1. Three resolution methods were tested: Benders Decomposition; Branch-and-Cut Data; and Dynamic Search that is available in CPLEX. The results suggest that the classical version of Benders Decomposition presented the best computational performance and also in terms of solution quality.

Keywords: Retail; Distribution network design; Hub location; Integer Programming; Benders Decomposition

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Fonte: ILOS (2016) 21
Figura 2 – Representação da rede do PLFC 26
Figura 3 – Representação da rede de um Problema de Localização de Facilidades com Dois Elos (PLFDE) 31
Figura 4 – Exemplo de PLF com níveis hierárquicos 37
Figura 5 – Configuração Ponto a Ponto 38
Figura 6 – Configuração *Hub-and-Spoke* 38
Figura 7 – Configuração *Hub-and-Spoke* com ganho de escala nas ligações 39
Figura 8 – Representação gráfica das soluções de P e PL. 58
Figura 9 – Partição do problema P. 59
Figura 10 – Representação gráfica das soluções de P^1. 59
Figura 11 – Partição do problema P^1. 60
Figura 12 – Representação gráfica das soluções de P^3 e P^4. 60
Figura 13 – Fluxograma do método Branch-and-Bound 63
Figura 14 – Desigualdade Inteira Mista 64
Figura 15 – Fluxograma da metodologia realizada 69
Figura 16 – Mapa com a localização atual de CDs e lojas da empresa 73
Figura 17 – Mapa com a localização dos candidatos a CDs e *hubs* 94
Figura 18 – Mapa com a configuração proposta para o Modelo-1 96
Figura 19 – Mapa com a configuração proposta no Modelo-2 Cenário A 98
Figura 20 – Mapa com a configuração proposta para o Modelo-2 Cenário B 100
Figura 21 – Mapa com a configuração proposta para o Modelo-3 102

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Exemplo numérico da Decomposição de Benders 56

Tabela 2 – Equação do custo de transporte por intervalo de distância (km) 78
Tabela 3 – Custos fixos estimados (R$/$m^2$) de abertura para CDs e *hubs* 79
Tabela 4 – Custos fixos (R$/$m^2$) mensais considerados para os CDs e *hubs* 81
Tabela 5 – Custos variáveis (R$/quantidade distribuída) utilizados para os CDs e *hubs* testados 82

Tabela 6 – Resumo das características de cada modelo 92

Tabela 7 – Localização dos CDs e *hubs* candidatos 95
Tabela 8 – Resumo dos resultados práticos 103
Tabela 9 – Informações sobre o porte dos casos testados 104
Tabela 10 – Resultados computacionais dos três métodos de resolução em cada modelo resolvido 105

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CD	Centro De Distribuição
CDS	Centros De Distribuição
PLF	Problema De Localização De Facilidades
PLFC	Problema De Localização De Facilidades Capacitado
PLFDE	Problema De Localização De Facilidades Com Dois Elos
PLFME	Problema De Localização De Facilidades Multi-elos
PLFMP	Problema De Localização De Facilidades Multiproduto
PLFNC	Problema De Localização De Facilidades Não-capacitado
PLH	Problema De Localização De *Hubs*
PT	Ponto De Transbordo
PTS	Pontos De Transbordo
TI	Tecnologia Da Informação

SUMÁRIO

Introdução **14**

Objetivo geral 16

Objetivos específicos 16

Justificativa 17

Estrutura do trabalho 17

1 O problema de localização de facilidades **19**

1.1 Estrutura da rede de uma cadeia de suprimentos 19

1.2 PLF Clássicos 23

1.3 Variantes dos PLFs clássicos 27

1.3.1 O problema de localização de facilidades multiproduto (PLFMP) 27

1.3.2 O problema de localização de facilidades com Dois Elos (PLFDE) 28

1.3.3 O problema de localização de facilidades com níveis hierárquicos 34

1.4 Problema de Localização de *Hubs* 36

2 Métodos de Resolução de Problemas de Programação Inteira Mista **43**

2.1 Decomposição de Benders 43

2.2 *Branch-and-Cut* 56

2.2.1 *Branch-and-Bound* 56

2.3 Algoritmo de Planos Cortantes 62

2.4 *Dynamic Search* 66

3 Desenho Metodológico **68**

4 Problema a ser estudado **72**

4.1 Descrição da empresa 72

4.2 Definição do problema 72

4.3 Levantamento de dados 74

4.4 Limitação do estudo 82

5 Modelos matemáticos propostos 84

5.1 Monoproduto com alocação múltipla 84

5.2 Monoproduto com alocação múltipla e escolha do tamanho do CD 87

5.3 Multiproduto com alocação múltipla e escolha do tamanho de CDs 89

6 Experimentos computacionais 93

6.1 Resultados práticos 93

6.1.1 Modelo monoproduto com alocação múltipla (Modelo-1) 95

6.1.2 Modelo monoproduto com alocação múltipla e escolha de tamanho dos CDs (Modelo-2) 97

6.1.3 Modelo multiproduto com alocação múltipla e escolha de tamanho dos CDs (Modelo-3) 100

6.2 Resultados computacionais 104

7 Conclusões 106

Referências 108

Introdução

Empresas de diversos setores têm buscado novas formas de redução de custos e de melhoria da sua perfomance de entrega de serviços e de produtos para o cliente, com o objetivo de permanecerem competitivos no mercado. Ballou [2006] discute a evolução das formas de distribuição física com as mudanças ao longo dos anos da logística e do gerenciamento da cadeia de suprimento. Para este autor, no passado, a distribuição física e a logística começaram a se desenvolver como funções independentes e com pouca coordenação com outras áreas do processo produtivo e apenas por volta dos anos 2000 as empresas começaram a utilizar esta integração na prática. Para o futuro, sua perspectiva é que o gerenciamento da cadeia de suprimentos se torne fator com cada vez maior importância pela possibilidade de geração de um melhor nível de serviço e expansão para mercados cada vez mais globais. Um dos setores envolvidos nesse contexto de enfrentamento da competitividade para atingir novos patamares no mercado e que é objeto de estudo no presente trabalho é o setor do varejo. Empresas deste setor enfrentam o desafio de executarem a distribuição de produtos de forma cada vez mais otimizada, mantendo um determinado nível de serviço.

Neste contexto, surgem questões como a minimização do tempo total das viagens, distâncias físicas e com essas questões, tem-se a necessidade de atualização de sua rede logística. A decisão da localização de suas instalações é fundamental estrategicamente. Um exemplo está na abertura de cada loja, pois para que seja viável é preciso considerar diversas variáveis, entre elas, o custo de distribuição a partir de seus centros de distribuição (CDs). Assim, uma nova rede de distribuição torna-se necessária de acordo com o plano de expansão da empresa para que seja possível atingir novos mercados. Dessa forma, uma análise de possíveis cenários considerando diferentes horizontes de tempo é desejável e faz parte do gerenciamento estratégico. Essa decisão é, geralmente, tomada mediante um estudo para definição de possíveis pontos para localização de suas facilidades com a análise de custos envolvidos. Dentre os principais custos podemos citar custos com transporte, aluguel ou compra da propriedade, compra e instalação de equipamentos. Além desses, outros fatores relevantes na tomada de decisão da localização das facilidades são possíveis vantagens tributárias, disponibilidade

de mão-de-obra e fácil acesso às principais vias para escoamento de mercadoria.

Além da localização de CDs, uma importante alternativa para melhorar a distribuição e os custos de uma empresa do varejo é a abertura de *hubs* (concentradores). Esses *hubs* são bases menores que podem representar uma importante alternativa de redução de custos pela possibilidade de consolidação de carga com destinos próximos. A utilização dos *hubs* é uma forma de enfrentar a dificuldade na obtenção de veículos pequenos para percorrer distâncias maiores quando existem restrições do tipo de veículo recebido pelos clientes. Assim, a utilização dos veículos menores é feita a partir dos *hubs* que encurtam as distâncias com os clientes em relação aos CDs. A utilização dos *hubs* também é importante estrategicamente pela possibilidade de possuírem um estoque avançado com as mercadorias de maior giro, reduzindo, então, o tempo de entrega para os clientes finais.

Esse trabalho tem como foco o Problema de Localização de Facilidades (PLF), que envolve a tomada de decisão acerca da localização de uma ou mais facilidades e da distribuição de múltiplos produtos a partir delas, para atender integralmente a demanda de um dado conjunto de clientes. Esse é um problema de decisão em nível estratégico onde as decisões implementadas permanecem sem mudanças por um longo período de tempo [Ho, 2015].

Para modelar este problema foram empregadas técnicas de Pesquisa Operacional, mais especificamente de Programação Inteira. Foram feitas adaptações em modelos matemáticos clássicos para a construção de formulações adaptadas às características da empresa. As formulações matemáticas desenvolvidas foram codificadas no *software* para otimização *AIMMS*, sendo, então, resolvidas por três métodos distintos: *Branch-and-Cut*, Decomposição de Benders e *Dynamic Search*. Empregou-se as implementações destes métodos disponíveis no *CPLEX* 12.7.1.

Neste estudo foram testados treze possíveis locais para a instalação dos CDs e vinte e três possíveis locais para a instalação dos *hubs*. Os cenários que foram construídos para a resolução do problema foram:

(C1) uma versão monoproduto com alocação múltipla e possível alocação de *hubs* como nós de transbordo entre CDs e lojas;

(C2) cenário com características similares ao (C1) com a inclusão do tamanho dos CDs a serem abertos como uma variável do problema. Além disto, o cenário 2 foi resolvido

com duas variações em que foram flexibilizadas as distâncias máximas permitidas entre as facilidades e os clientes das seguintes formas: (2a) permitiu-se distâncias máximas maiores de atendimento entre facilidades e clientes; (2b) as distâncias máximas permitidas foram reduzidas de modo a garantir que os clientes fossem atendidos por facilidades mais próximas;

(C3) multiproduto com alocação múltipla e *hubs* usados como nós de transbordo e como pontos de estoque avançado dos produtos de maior valor agregado, produtos da linha de tecnologia.

O resultado do cenário 1 foi a abertura de três dos treze CDs testados e um *hub*, resultando em uma economia projetada de 1,1% em relação ao custo atual que a empresa teria com a manutenção da rede de distribuição atual. Entretanto, este cenário aumentou a distância média de distribuição. No cenário 2a obteve-se uma solução em que sete CDs são abertos e nenhum *hub*, com uma redução de custos projetada em 11% e também uma redução aproximada de 160 km de distância média de distribuição. Já o cenário 2b teve a abertura de 11 CDs e nenhum *hub*, com uma redução de custos projetada de 7% e redução da distância média em 200 km. O cenário 3 teve a abertura de 8 CDs, 5 *hubs* com função apenas de armazenagem e uma redução de custos de 7,1%.

Nos capítulos posteriores os detalhes da modelagem matemática, da implementação computacional e dos resultados obtidos são apresentados com detalhes.

Objetivo geral

O objetivo desse trabalho é resolver o Problema de Localização de Facilidades em uma rede de distribuição do varejo.

Objetivos específicos

- Encontrar a localização ótima para os CDs de uma empresa do varejo;

- Verificar a viabilidade da localização de *hubs* como pontos de transbordo e estoques avançados;
- Construir cenários com o objetivo de redução de custos para buscar maior aproximação às características da empresa, considerando diferentes níveis de serviço para auxílio à sua tomada de decisão.

Justificativa

A justificativa para esse trabalho se dá pela necessidade da revisão da malha de transporte da empresa em questão, já que há atualmente uma grande distância a ser percorrida dos CDs para a maioria de suas lojas, fator determinante para aumento de custos e redução do nível de serviço. Três dos quatro CDs da empresa foram inaugurados há mais de quinze anos, período em que houve grande mudança no perfil e localização de suas lojas. Espera-se, então, encontrar uma solução mais adequada ao cenário atual que certamente implicará em uma redução de custos, inclusive com a possibilidade de inclusão de pontos concentradores (os *hubs*). Pretende-se implementar esta solução a médio prazo quando o término de seus contratos de aluguel dos CDs for efetivado.

Estrutura do trabalho

O presente trabalho de pesquisa possui sete capítulos e está dividido da seguinte forma: o Capítulo 1 apresenta na seção 1.1, uma discussão do conceito da cadeia de suprimentos em uma rede de distribuição e de como os custos logísticos são classificados na literatura. Este capítulo também traz uma breve revisão dos Problemas de Localização de Facilidades em redes, a partir dos quais foram utilizados como base para os modelos empregados neste estudo. O Capítulo 2 apresenta os métodos utilizados para a resolução do problema, Decomposição de Benders, *Branch-and-cut* e *Dynamic Search*. O Capítulo 3 apresenta o desenho metodológico, com as etapas para a realização do trabalho, o

capítulo 4 apresenta o problema a ser estudado, com as seções 4.1 de descriçao da empresa, 4.2 com a definição do problema, 4.3 com o levantamento de dados e a seção 4.4 que apresenta as limitações do trabalho. O Capítulo 5 apresenta os modelos matemáticos adaptados para representar as características da empresa. O Capítulo 6 descreve os resultados obtidos com a resolução do problema e o Capítulo 7 apresenta as conclusões e perspectivas para trabalhos futuros.

1- O problema de localização de facilidades

1.1- Estrutura da rede de uma cadeia de suprimentos

De acordo com Klibi et al. [2010], a rede de uma cadeia de suprimentos é composta de cinco tipos de entidades principais: (i) fornecedores externos, (ii) fábricas, (iii) centros de distribuição (iv) zonas de demanda e (v) ativos de transporte. Para a formulação matemática de problemas de localização, os fornecedores externos são normalmente desconsiderados, em função da impossibilidade do planejamento destes elos nas decisões de localização, armazenagem e transporte, exceto em situações em que há algum tipo de parceria para o planejamento integrado da rede. Assim, apenas no caso em que se absorve quase integralmente a produção destes fornecedores é que tal influência no projeto de rede e no planejamento tático dos transportes se torna possível.

Existem três níveis de planejamento e tomada de decisão em uma cadeia de suprimentos: os níveis estratégico, tático e operacional. De acordo com Shen [2005], além das decisões de localização das facilidades, decisões de seleção de tecnologias também são tomadas no nível estratégico. Após a configuração da cadeia de suprimentos ser determinada, o foco passa a ser as decisões do nível tático e operacional. Shen [2005] sugere que é no nível tático que são tomadas as decisões de gestão de estoque e no nível operacional são tomadas as decisões como dos níveis de produção e das políticas de transportes. Dado a sua natureza, as decisões tomadas no nível estratégico não poderão ser alteradas por um longo período de tempo. No nível tático, as decisões são revisadas no médio prazo (em geral, alguns meses à frente), enquanto no nível operacional a base é semanal ou diária, podendo sofrer mudanças regularmente.

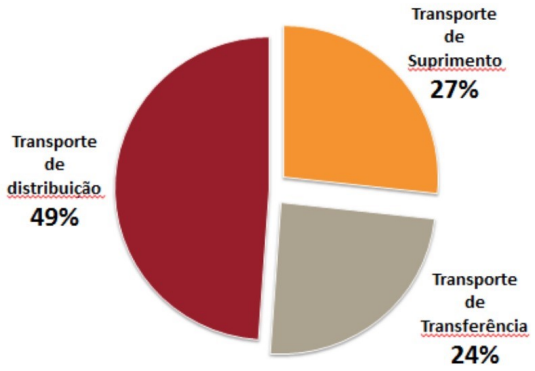
Erengüç et al. [1999] discutem as decisões estratégicas que são usualmente consideradas no planejamento da distribuição de toda a cadeia de suprimentos. Entre elas, destacam-se: (i) Quais tipos de produtos devem ser distribuídos? (ii) Quantos fornecedores de cada categoria ou grupo de materiais devem existir? , (iii) Quantos CDs são necessários e onde devem estar localizados?, (iv) Qual a quantidade de produtos que deve ser distribuída para cada cliente?, (v) Que produtos devem ser operados por

cada centro de distribuição (CD)?, (vi) Deve haver pontos de estoque intermediário entre os CDs e os clientes? (vii) Qual o volume e frequência de entrega ideal? As questões citadas são importantes para o entendimento da complexidade de uma rede da cadeia de suprimentos. Em função desta complexidade, uma importante discussão acerca da cadeia de suprimentos é em relação aos custos envolvidos na manutenção das redes das cadeias de suprimentos.

Os custos associados à cadeia de suprimentos são significativos e, por isso, encontram-se na literatura diversas formas de classificação desses custos. Custos logísticos totais normalmente representam uma grande parte dos custos de uma cadeia de suprimentos, especialmente, quando a cadeia se estende por um mercado global. Segundo a ILOS (2016), os custos logísticos correspondem a 12,3% do PIB brasileiro e representam 7,6% da receita líquida das empresas. Diversos trabalhos fazem a classificação dos custos logísticos. Töyli et al. [2008] e Engblom et al. [2012] classificam os custos em: (i) transporte; (ii) armazenagem; (iii) manutenção de estoques; (iv) custos administrativos; (v) custos com manuseio e embalagem e (vi) custos logísticos indiretos. Zeng and Rossetti [2003] também fazem uma classificação em seis categorias com a junção de custos de armazenagem e manutenção de estoques em uma categoria e tratando os custos indiretos como: riscos e danos e serviços aos clientes.

Já Ballou [2006] organiza os componentes de um sistema logístico em atividades-chave e atividades de suporte, em que as atividades-chave, em geral, ocorrem em todos os processos logísticos e as de suporte ocorrem de acordo com as atividades de cada empresa. As atividades-chave são: (i) serviço ao cliente; (ii) transporte; (iii) gerenciamento de estoques; (iv) fluxos de informação e processamento de pedidos, enquanto as de suporte são: (i) armazenagem; (ii) manuseio de materiais; (iii) compras; (iv) embalagem; (v) controle da produção e operações; (vi) manutenção de informações. Ainda de acordo com Ballou [2006], as atividades-chave são essenciais para uma logística eficiente e representam a maior parte dos custos logísticos. Os serviços ao cliente são críticos pois estabelecem a qualidade dos serviços, sendo os custos logísticos proporcionais ao nível de serviço. O transporte representa cerca de 50% dos custos logísticos; estocagem e manuseio representam cerca de 25%, que são distribuídos em cerca de 50% para funcionários, 25% correspondem ao espaço e as demais abrangem energia, equipamentos, materiais, entre outros. O Gráfico 1 obtido pela ILOS ILO ilustra a importância dos custos de transporte em relação aos custos logísticos totais no Brasil.

Figura 1 – Fonte: ILOS (2016)



Os custos logísticos podem ser divididos entre custos fixos e variáveis. Gudehus and Kotzab [2012] definem os custos variáveis como custos que variam de acordo com a taxa de transferência (quantidade de produtos distribuídos) e níveis de desempenho, enquanto os custos fixos são independentes da quantidade de produtos e serviços gerada. Gudehus and Kotzab [2012] classificam os custos variáveis e fixos conforme abaixo:

Custos variáveis:

1. Custos com funcionários.
2. Custos com consumo de materiais.
3. Custos com locação de meios de transporte.
4. Custos com energia.
5. Custos de manutenção de equipamentos.
6. Custos com pedágios.
7. Custos de depreciação dependentes do uso, como meios de transporte, equipamentos de transporte de carga, entre outros.
8. Custos de manutenção de estoques dependentes da taxa de distribuição.

Custos fixos:

1. Custos com funcionário dos setores administrativos e gerenciais.

2. Custos com aluguel.
3. Custos com a contratação de serviços externos.
4. Custos com impostos fixos e seguros.
5. Custos de depreciação dependentes do tempo, áreas, edifícios, armazéns, etc.
6. Custos de depreciação e juros sobre despesas ativadas para planejamento, gerenciamento de projetos, implementação e consultoria.
7. Custos permanentes de manutenção de estoques.

Além destes custos, Gudehus and Kotzab [2012] também adicionam uma categoria de custos com Tecnologia da Informação (TI) que definem como custos operacionais com sistemas de TI próprios ou contratados externamente usados com propósitos logísticos, porém, não incluem esses custos na classificação de fixos ou variáveis. Para a empresa em questão, estes custos são fixos. O detalhamento de todos os custos considerados e da forma como foram calculados para a empresa em questão são apresentados no capítulo 4.

Durante a etapa do planejamento estratégico, o entendimento dos custos é um fator fundamental para que os projetos planejados possam ser implementados. Nesta fase de projeto, decisões estratégicas como de localização de facilidades e seleção de tecnologia possuem papel principal. O estudo das decisões inerentes à localização e capacidade de fábricas, armazéns, lojas, hospitais, postos de saúde, etc., são normalmente denominados de PLF. De acordo com Ghiani et al. [2004], decisões de localização de facilidades são necessitadas em virtude de variações no padrão de demanda ou distribuição espacial, ou seguindo modificações nos materiais, energia ou no custo do trabalho. Estas decisões são usualmente feitas quando novos produtos ou serviços são lançados, ou quando os desatualizados são retirados do mercado. Ainda segundo Ghiani et al. [2004], outra questão relevante do PLF é o fato de decisões de localização poderem afetar o volume de demanda, pois a nova distribuição espacial das facilidades pode levar à aquisição de clientes que anteriormente não poderiam ser atendidos com um nível de serviço satisfatório por estarem fisicamente muito distantes. Os estudos de localização compreendem não somente a escolha da localização ideal para as facilidades, mas também, a sua quantidade ideal. Segundo Galvão [2004], problemas de localização podem ter diversas formas, dependendo da natureza da função objetivo, do horizonte

de tempo que está sendo considerado, da existência de relações hierárquicas entre facilidades, entre outros.

Uma vez que o modelo desenvolvido neste trabalho é uma variante do Problema de Localização de Facilidades com ou sem *hubs*, acha-se relevante apresentar as versões clássicas do PLF: O Problema de Localização de Facilidades Não-capacitado (PLFNC) e o Problema de Localização de Facilidades Capacitado (PLFC).

1.2- PLF Clássicos

O PLFNC e o PLFC são problemas básicos de localização de facilidades em redes com o objetivo de minimizar o custo total de atendimento integral da demanda de um conjunto definido de clientes. Geralmente, dois componentes de custo são considerados: os custos fixos para instalação e operação das facilidades; e os custos variáveis de transporte entre facilidades e clientes. Também é comum considerar custos variáveis nas facilidades, que muitas vezes representam custos de produção ou de movimentação e manuseio, a depender da natureza da facilidade. Além disso, as restrições do problema são do atendimento integral à demanda dos clientes e da definição das variáveis de localização e fluxo.

No PLFNC considera-se que a capacidade de cada facilidade é ilimitada. Os conjuntos de índices, parâmetros e variáveis de decisão para o PLFNC são apresentados abaixo:

Conjuntos:

J = $1, \ldots, m$ é o conjunto de clientes;

I = $1, \ldots, n$ é o conjunto de potenciais localizações para abertura das facilidades.

Parâmetros:

C_{ij} = Custo total de produção e de transporte;

F_i = Custo fixo de instalação da facilidade i;

Variáveis de decisão:

X_{ij} = proporção da demanda dos clientes j satisfeita pela facilidade i.

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{se o CD } i \text{ é aberto;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A formulação matemática do PLFNC é apresentada nas expressões (1)-(5):

$$\min \ Z = \sum_i \sum_j C_{ij} X_{ij} + \sum_i F_i Y_i \tag{1}$$

Sujeito a:

$$\sum_i X_{ij} = 1, \ \ para \ \ j \in J \tag{2}$$

$$Y_i \geq X_{ij}, \ \ para \ \ i \in I, j \in J \tag{3}$$

$$X_{ij} \geq 0, \ \ para \ \ i \in I, j \in J \tag{4}$$

$$Y_i \in \{0, 1\}, \ \ para \ \ i \in I \tag{5}$$

A função objetivo (1) representa a soma dos custos fixos e variáveis. As restrições definidas em (2) garantem que a demanda de cada cliente seja integralmente atendida, enquanto aquelas em (3) relacionam as variáveis localização e fluxo, de tal forma que só haja fornecimento de fluxo a partir de facilidades que tenham sido abertas. Em (4) e (5) são definidos os domínios das variáveis de decisão.

O PLFC envolve basicamente os mesmos conjuntos, parâmetros e variáveis de decisão e restrições do PLFNC, com exceção da presença de restrições de capacidades que limitam em B_i, a quantidade máxima de fluxo que pode ser fornecida por cada facilidade i, caso utilizada. Neste problema, cada facilidade tem uma capacidade limitada de fornecimento de fluxo da rede.

A formulação do PLFC é apresentada nas expressões:

Parâmetros:

B_i = Capacidade do CD i;

D_j = demanda do cliente j.

Variáveis de decisão:

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{se o CD } i \text{ é aberto;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

X_{ij} = quantidade de produto enviada do CD i para o cliente j.

$$\min \ Z = \sum_i \sum_j C_{ij} X_{ij} + \sum_i F_j Y_i \tag{6}$$

Sujeito a:

$$\sum_i X_{ij} = D_j, \ \ para \ \ j \in J \tag{7}$$

$$\sum_j X_{ij} \leq B_i Y_i, \ \ para \ \ i \in I \tag{8}$$

$$X_{ij} \geq 0, \ \ para \ \ i \in I, j \in J \tag{9}$$

$$Y_i \in \{0, 1\}, \ \ para \ \ i \in I \tag{10}$$

No modelo acima, a função objetivo e as restrições, possuem as mesmas funções que as apresentadas do modelo do PLFNC. A excessão é restrição do grupo (8), que garante que a capacidade da facilidade i não seja ultrapassada e que apenas haja fornecimento de fluxo a partir de facilidades que tenham sido abertas e cuja inserção torna redundantes as restrições (3). A figura 2 representa a rede do PLFC.

Dentre os PLFs existe uma restrição comum na literatura de fonte única. Os PLFs com fonte única consideram que cada cliente deve receber toda a sua demanda de apenas um ponto de origem. Essa também é uma variante do PLF que se aproxima das características reais de muitos problemas, pois muitas empresas optam por um distribuição com uma fonte única como forma de reduzir custos administrativos e garantir um melhor gerenciamento da cadeia de suprimentos. Os problemas do PLFNC e PLFC apresentados em (1)-(5) e (6)-(10), respectivamente, possuem restrição de fonte múltipla,

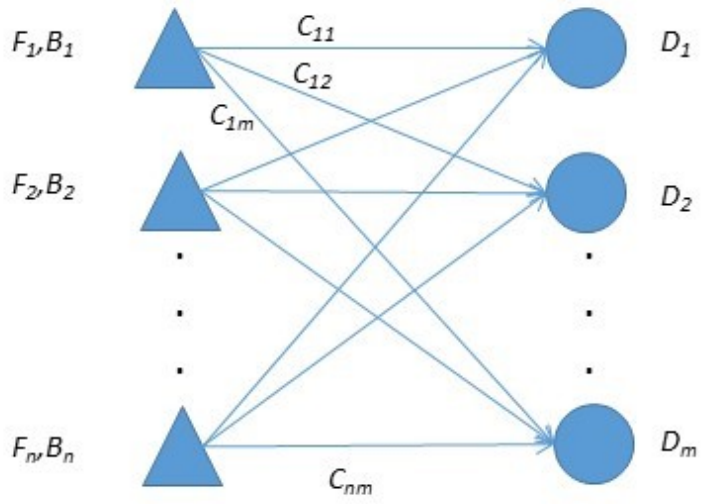


Figura 2 – Representação da rede do PLFC

Fonte: O próprio autor.

visto que não há um impedimento que faça com que a demanda de um dado cliente seja atendido por mais que uma facilidade. Porém, eles também podem ser enunciados com restrição de fonte única, assim como qualquer outro modelo de localização que tenha uma restrição de atendimento de demanda. Para torná-los modelos com restrição de fonte única é necessário declarar a variável X_{ij} com a exigência de que ela seja binária.

Convém ainda notar que na versão não-capacitada, mesmo que não seja exigido o atendimento de uma restrição de fonte única, pode-se garantir que sempre existirá uma solução ótima na qual a restrição de fonte única é atendida. Isso quer dizer que todas as variáveis X_{ij} serão 0 ou 1, mesmo sem essa exigência. Essa propriedade é chamada Propriedade da Fonte Única e isto ocorre pois, uma vez que não há restrições de capacidade nas facilidades, nada impede que todo o fluxo seja alocado na facilidade mais próxima, dentre as facilidades abertas. Dessa forma, um fluxo só será dividido entre duas facilidades se houver um empate na distância ou no custo de transporte entre o cliente e duas ou mais facilidades. Não havendo empates, cada cliente será atendido por uma única facilidade, a mais próxima ou de menor custo.

Na próxima seção serão apresentados algumas variantes dos PLFs clássicos.

1.3- Variantes dos PLFs clássicos

A seguir apresentam-se algumas variantes do PLF que são comuns na literatura e serão utilizadas no trabalho para a construção das formulações matemáticas. Na subseção 1.3.1 apresenta-se o Problema de Localização de Facilidades Multiproduto, na subseção 1.3.2 serão discutidas as características do Problema de Localização de Facilidades Multi-elos (PLFME), quando etapas adicionais de recebimento e distribuição são adicionados na cadeia de suprimentos. Na subseção 1.3.3 discute-se a teoria dos PLFs com níveis hierárquicos e uma classificação presente na literatura. Na seção 1.4, apresenta-se o Problema de Localização de *Hubs* (PLH) com a discussão de suas aplicações e uma classificação presente na literatura.

1.3.1 O problema de localização de facilidades multiproduto (PLFMP)

O Problema de Localização de Facilidades Multiproduto (PLFMP) considera a distribuição de um mix de produtos pela cadeia de suprimentos, o que torna o modelo mais realista, visto que são raras as empresas que comercializam um único tipo de produto. Entretanto, muitas vezes, o uso de um modelo monoproduto é uma hipótese simplificadora que será tão mais adequada quanto mais uniformes forem as condições de produção, transporte, manuseio e armazenagem destes produtos. Evita-se, assim, que o número de variáveis do modelo cresça, aumentando desnecessariamente o custo computacional para resolvê-lo. Ao mesmo tempo, existem empresas que produzem e distribuem milhares de produtos cujas características impedem a modelagem monoproduto. Uma forma de reduzir esse esforço computacional é considerar famílias de produtos com características semelhantes. Muitas empresas que comercializam uma grande quantidade de produtos já possuem essa classificação dos produtos em diferentes linhas como melhor forma de gerenciar as vendas. Dessa forma, essa classificação pode ser utilizada na resolução do PLFMP. Os modelos apresentados na seção 1.2 do PLFNC e PLFC, com um elo, também, poderiam ser apresentados na versão multiproduto.

1.3.2 O problema de localização de facilidades com Dois Elos (PLFDE)

Sistemas com dois ou mais elos são caracterizados por um ou mais grupos de estágios intermediários onde diversas operações podem ser realizadas [Gonzalez-Feliu, 2011]. O seu objetivo é determinar quais as facilidades que devem abrir simultaneamente em cada nível, de forma que clientes são alocados em uma ou múltiplas sequências de facilidades abertas, enquanto otimiza a sua função objetivo [Ortiz-Astorquiza et al., 2018]. Segundo Gonzalez-Feliu [2008], na configuração de sistemas de transporte, três principais estratégias de distribuição podem ser encontrados: (1) Distribuição direta, que consiste em entregar diretamente da origem ao destino; (2) Distribuição multi-elo com centro de distribuição, que são sistemas com produtos feitos em uma ou mais fábricas, um conjunto de centros de distribuição e o destino final; (3) Transporte multi-elo com *crossdocking*, que diferem da estratégia (2), pois são plataformas que não possuem possibilidade de estocagem, permitindo apenas consolidação e operação de transbordo para o destino final.

O uso de pontos intermediários de distribuição em uma rede de suprimentos possibilita a redução do número de rotas necessárias para a distribuição de produtos entre as fábricas e seus clientes, além de contribuir para a diminuição do tráfego de veículos pesados provenientes das fábricas nos grandes centros urbanos através da instalação de tais pontos nos limites externos destes centros [Fernandes et al., 2011]. A figura 3 apresenta um exemplo de PLFDE, que está contido nos PLFME e é o tipo mais comumente encontrado na literatura.

A seguir será apresentada a modelagem matemática para o PLFDE, que compreendem de fábricas, centros de distribuição e clientes, conforme apresentado em Klose [2000].

As expressões (11)-(18) apresentam a formulação do PLFDE.

Conjuntos:

$I = \{1,\ldots, q\}$ é o conjunto de fábricas;
$J = \{1,\ldots, n\}$ é o conjunto de potenciais localizações para abertura dos *CDs*;
$K = \{1, \ldots, m\}$ é o conjunto de clientes.

Parâmetros:

C_{ij} = Custo total de produção e de transporte da fábrica i para o CD j.

C_{jk} = Custo total de produção e de transporte do CD j para o cliente k.

F_j = Custo fixo de instalação do CD j.

D_k = Demanda do cliente k.

B_j = Capacidade do CD j.

S_i = Capacidade de produção da fábrica i.

Variáveis de Decisão:

W_{ij} = Quantidade de produto enviada da fábrica i para o CD j.

$$X_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{se o cliente } k \text{ é atendido pelo CD } j; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$Y_j = \begin{cases} 1, & \text{se o CD } j \text{ é aberto;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\min \ Z = \sum_i \sum_j C_{ij} W_{ij} + \sum_j \sum_k C_{jk} X_{jk} + \sum_i F_j Y_j \tag{11}$$

Sujeito a:

$$\sum_j X_{jk} = 1, \ \ para \ \ k \in K \tag{12}$$

$$\sum_k D_k X_{jk} \leq B_j Y_j, \ \ para \ \ j \in J \tag{13}$$

$$\sum_j W_{ij} \leq S_i, \ \ para \ \ i \in I \tag{14}$$

$$\sum_i W_{ij} = \sum_k D_k X_{jk}, \ \ para \ \ j \in J \tag{15}$$

$$W_{ij} \geq 0, \ \ para \ \ i \in I, j \in J \tag{16}$$

$$X_{jk} \in \{0,1\}, \ \ para \ \ j \in J, k \in K \tag{17}$$

$$Y_j \in \{0,1\}, \ \ para \ \ j \in J \tag{18}$$

Neste modelo, a equação (11) é de minimização dos custos totais em que a primeira parcela representam os custos de transporte entre fábricas e CDs, a segunda parcela, os custos de transporte entre CDs e clientes e a terceira parcela, os custos de abertura dos CDs. A restrição (12) garante o atendimento da demanda por apenas um CD, a restrição (13)limita a distribuição do CD para que não seja maior que sua capacidade e para que apenas um CD aberto faça distribuição para clientes. A a restrição (14) garante que o enviado entre a fábrica i e CD j não ultrapasse a capacidade da fábrica. A restrição (15), que o fluxo entre a fábrica i e o CD j seja igual ao fluxo entre o CD j e o cliente k e as restrições (16)-(18) são as que declaram as variáveis de decisão.

Neste modelo do PLFDE a decisão de abertura da facilidade ocorre apenas nos CDs, porém, também poderia ser nas fábricas. A figura 3 representa a rede de um PLFDE, conforme modelo apresentado em (11) - (18). Caso o modelo representado fosse multiproduto, as fábricas e CDs poderiam ter capacidades diferentes para cada produto e os clientes, demandas diferentes por produto.

Encontram-se na literatura diversos trabalhos com foco no PLFME, como exemplo de contribuição para o tema, Tragantalerngsak et al. [1997] apresentaram uma modelagem matemática para o PLFDE capacitado com foco na versão com fonte única em que uma facilidade do segundo nível só poderia receber um fluxo de uma facilidade do primeiro nível e que um cliente só poderia receber de uma facilidade do segundo nível. Já Yaman [2009], apresenta um modelo matemático de uma rede de distribuição com *hubs* de três níveis e incorporação da consideração de nível de serviço com restrições de tempo de entrega.

O PLFME também pode ser escrito na versão multiprodutos. Geoffrion and Graves [1974] apresentaram uma formulação com dois elos da rede de distribuição multiproduto capacitado deste problema que foi formulado como um problema de Programação Linear Inteira Mista. O modelo proposto pelos autores será apresentado por serem amplamente

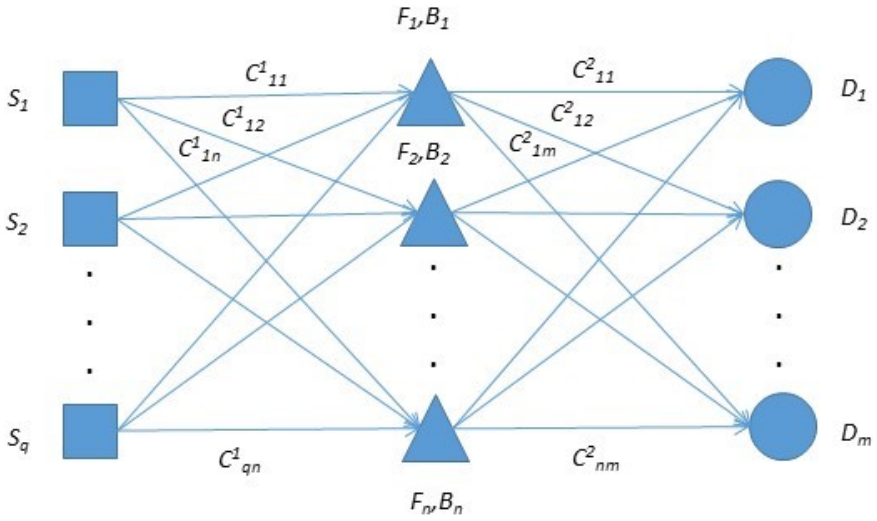


Figura 3 – Representação da rede de um PLFDE

Fonte: O próprio autor.

conhecidos e por conterem algumas das principais características dos PLF discutidas até o momento. O modelo também possui a restrição de fonte única, assim, a demanda de cada zona de cliente por cada produto é satisfeita com a entrega via CDs em que cada zona de demanda pode receber exclusivamente de um único CD. A formulação matemática é apresentada a seguir:

Conjuntos:

P = {1,. . . , m} é o conjunto de produtos;
I = {1,. . . , n} é o conjunto de fábricas;
J = {1,. . . , x} é o conjunto de potenciais CDs;
K = {1,. . . , z} é o conjunto de clientes.

Parâmetros:

S_{ip}: Capacidade da fábrica i pelo produto p;
D_{kp}: Demanda do cliente k pelo produto p;
$\underline{V}_j$, $\overline{V}_j$: Taxa de transferência mínima e máxima anual total permitida para um CD j;

F_j: Parcela fixa dos custos anuais de operação de um CD j;

v_j: Custo unitário variável de taxa de transferência para um CD j;

C_{ijkp}: Custo unitário médio de produção e transporte do produto p para a fábrica i pelo CD j para o cliente k.

Variáveis de decisão:

X_{ijkp}: Quantidade do produto p enviado pela fábrica i através do CD j para o cliente k;

$$W_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{se o CD } j \text{ serve o cliente } k; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$Y_j = \begin{cases} 1, & \text{se o CD } j \text{ é aberto;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Função objetivo:

$$\min \ X = \sum_p \sum_i \sum_j \sum_k C_{ijkp} X_{ijkp} + \sum_j [F_j Y_j + v_j \sum_p \sum_j D_{kp} W_{jk}] \tag{19}$$

Sujeito a:

$$\sum_j \sum_k X_{ijkp} \leq S_{ip}, \ \ para \ \ \forall p, \forall i \tag{20}$$

$$\sum_i X_{ijkp} = D_{kp} W_{jk}, \ \ para \ \ \forall p, \forall j, \forall k \tag{21}$$

$$\sum_j W_{jk} = 1, \ \ para \ \ \forall k \tag{22}$$

$$\underline{V}_j Y_j \leq \sum_p \sum_k D_{kp} W_{jk} \leq \overline{V}_j Y_j, \ \ para \ \ \forall j \tag{23}$$

$$W_{jk} \in \{0, 1\}, \ \ para \ \ \forall j, \forall k \tag{24}$$

$$Y_j \in \{0,1\}, \ \ para \ \ \forall j \tag{25}$$

$$X_{ijkp} \geq 0, \ \ para \ \ \forall p, \forall i, \forall j, \forall k, \tag{26}$$

onde a restrição (20) garante que a capacidade da fábrica i pelo o produto p não seja ultrapassada, a restrição (21), que a demanda pelo produto p seja atendida e que X_{ijkp} seja 0 para todo ip quando $W_{jk} = 0$. A restrição (22) especifica que cada cliente deve ser atendido por um único CD e a restrição (23) garante que a taxa de transferência total fique entre $\underline{V}_j$ e $\overline{V}_j$ e seja igual a 0 se um CD não é aberto e que se $Y_j = 1$, $W_{jk} = 1$, para determinado k. Este trabalho de Geoffrion and Graves [1974] é importante na literatura por abordar diversas variantes do PLF, tendo tido grande importância no desenvolvimento do tema.

As diversas variantes do PLF são usualmente problemas da classe NP-difícil. Em função dessa complexidade e de sua importância para diferentes setores, diversos artigos têm sido publicados na literatura com a proposta de novos modelos matemáticos de forma a representar novas características existentes nos problemas reais.

De acordo com algumas das variações possíveis para os PLFs, conforme apresentado, observa-se como ao longo do tempo elas foram introduzidas na literatura. Além do trabalho de Geoffrion and Graves [1974] que publicaram um artigo com foco no PLFME multiproduto para modelar o problema de localização de CDs, cujo papel é transbordar o fluxo de produtos das fábricas para os clientes, conforme modelo apresentado, ao longo dos anos, outras formulações matemáticas com fluxo multiproduto foram apresentadas. Como exemplo, em Hinojosa et al. [2000] que apresentaram uma formulação do PLFDE com múltiplos produtos e dinâmica, isto é, que considera um horizonte de planejamento composto de um número finito de períodos de tempo. O objetivo é determinar a localização de facilidades em cada período de tempo de forma a minimizar os custos para atendimento à demanda dos clientes ao longo do horizonte de planejamento considerado. Mais recentemente, Li et al. [2012] propuseram um novo método de solução para um PLFDE multiproduto aplicado à distribuição física, onde o primeiro elo é do suprimento dos CDs para os *hubs*, e o segundo elo, o da distribuição dos *hubs* para os clientes por *hubs* quando estes possuem a função de transbordo, podendo ser chamados de Ponto de Transbordo (PT), e podendo ter diferentes tipos com características distintas. No

trabalho dos autores cada tipo é definido por uma capacidade para armazenar produtos e apenas um tipo pode ser escolhido ao abrir um PT em um determinado local. A seguir apresenta-se o PLF com níveis hierárquicos, com uma classificação presente na literatura e uma breve discussão da comparação com o PLFME.

1.3.3 O problema de localização de facilidades com níveis hierárquicos

Um PLF hierárquico tem o objetivo de determinar a localização de facilidades de forma que facilidades em um nível mais alto pode servir facilidades em um nível mais baixo de forma eficiente, com um objetivo financeiro, e efetivo, com um objetivo de acessibilidade [Farahani et al., 2014]. De acordo com Şahin and Süral [2007], sistemas de facilidades hierárquicos são sistemas complexos de diferentes tipos de facilidades em que uma coordenação de serviços em diferentes níveis requer a integração na organização espacial das instalações. Os autores citam cinco principais utilizações de problemas de localização hierárquicos que são sistemas de saúde, sistemas de gestão de resíduos tóxicos, sistemas de educação, sistemas de serviço médico de emergência e sistemas de produção e distribuição, que é a abordagem do presente trabalho.

Şahin and Süral [2007] apresentaram uma revisão de modelos de localização de facilidades em níveis hierárquicos em que se propõe uma classificação para estes problemas baseada em quatro atributos:

1. Padrão de fluxo:
   (a) Fluxo único: Nesse padrão de fluxo, ele é iniciado no nível 0, passa por todos os níveis de facilidades e termina no nível mais alto da cadeia (podendo também ocorrer o fluxo inverso).
   (b) Fluxo múltiplo: Nesse padrão de fluxo, ele pode iniciar de qualquer nível mais baixo e seguir para qualquer nível mais alto (podendo também ocorrer o fluxo inverso). Assim, são mais complexos em relação ao atendimento da demanda e são, normalmente representados por modelos multiobjetivo.
2. Varidade de serviços:

   (a) Hierarquia aninhada: uma facilidade de nível mais alto fornece também os serviços que são fornecidos por uma facilidade de nível mais baixo.

   (b) Hierarquia não-aninhada: facilidades em cada nível oferecem diferentes serviços.

3. Configuração espacial:

   (a) Sistemas coerentes: Todos os pontos que tem um recebimento atribuído de um nível hierárquico inferior tem uma entrega atribuída a um nível hierárquico superior.

   (b) Sistemas não-coerentes: São sistemas menos restritos em relação à configuração espacial dos níveis.

4. Objetivo:

   (a) Mediana: Minimizar a distância total ponderada pela demanda.

   (b) Cobertura: Em modelos de cobertura, um cliente é considerado coberto por uma facilidade se ela estiver localizada dentro de uma proximidde particular e seu objetivo é minimizar o número de facilidades necessárias para cobertura de todos os clientes ou maximizar clientes cobertos com um número específico de facilidades (cobertura máxima).

   (c) Custos fixos: Minimizar custos totais de construção ou instalação de facilidades e de transporte.

Na última classificação do Objetivo, acrescentaria-se um item em que além dos Custos fixos, custos variáveis de operação das facilidades também fossem considerados, conforme objetivo do presente trabalho.

Segundo Ortiz-Astorquiza et al. [2018], PLFMEs podem ser considerados uma subclasse do PLF com níveis hierárquicos. De acordo com o autor, os termos a seguir são comumente encontrados na literatura como sinônimos: multi-elo, multi-estágio, multi-nível, hierárquico e multi-camada, como no trabalho de Şahin and Süral [2007]. Porém, os autores discutem algumas diferenças entre os modelos multi-elo e os hierárquicos, diferença também destacada em Farahani et al. [2014]. As principais diferenças em destaque são que nos PLF hierárquicos, o requerido pelos clientes são serviços e um mesmo cliente pode demandar diferentes tipos de serviços oferecidos por certos tipos de facilidades na hierarquia, por isso, são muitos comuns no setor da saúde com hospitais,

hospitais e clínicas. Já no PLFME, existe apenas um tipo de demanda, sendo mais comum em sistemas de produção-distribuição, em que fábricas servem CDs e estes servem clientes. Assim, os PLFMEs costumam ser não-aninhados, com diferentes tipos de serviço em vez de facilidades. Para o estudo de caso do presente trabalho, o problema poderia ser considerado também hierárquico sob o ponto de vista de serviços distintos disponibilizados por CDs e *hubs*, já que os *hubs* possuem demanda para um tipo específico de produto.

Como trabalhos relevantes publicados sobre o PLF com níveis hierárquicos, o trabalho de Galvão et al. [2002] apresenta um modelo para a localização de facilidades de saúde maternal e perinatal na cidade do Rio de Janeiro, em que são consideradas no modelo proposto, três níveis de facilidades: Unidades básicas (nível 1), Maternidades (nível 2), Clínicas Neonatais (nível 3). A figura exemplica estes níveis e suas relações, em que x_{ij}^1, x_{ij}^2 e x_{ij}^3 representam respectivamente o fluxo de mães aos níveis de serviço 1, 2 e 3. A Figura 4 é apresentada com o objetivo de melhor ilustrar como funcionam as relações entre níveis de facilidades em PLFs com níveis hierárquicos. O trabalho de Farahani and Asgari [2007] apresenta um estudo de caso de localização de CDs no sistema de logística militar, em que a cadeia de suprimentos é composta por três tipos de facilidades: origens (nível 1), que são facilidades fisicamente fixas e sua localização e características são conhecidas e incluem portos, aeroportos e fábricas, centros de apoio (nível 2), que possuem número e localização desconhecida e podem ser atendidos por qualquer origem e são compostos por armazéns, oficinas e terminais de transporte e centros de suporte (nível 3), centros consumidores que são, normalmente, localizações fixas, podem receber de centros de apoio ou diretamente de origens e existem limitações nas relações entre centros de apoio e de suporte.

Na próxima seção são apresentados o PLH e uma classificação específica para representar as características específicas desse tipo de PLF.

1.4- Problema de Localização de *Hubs*

O PLH pode ser usado na concepção de uma rede de distribuição [Razmi and Rahmanniya, 2013]. *Hubs* são facilidades que funcionam como consolidadores e conec-

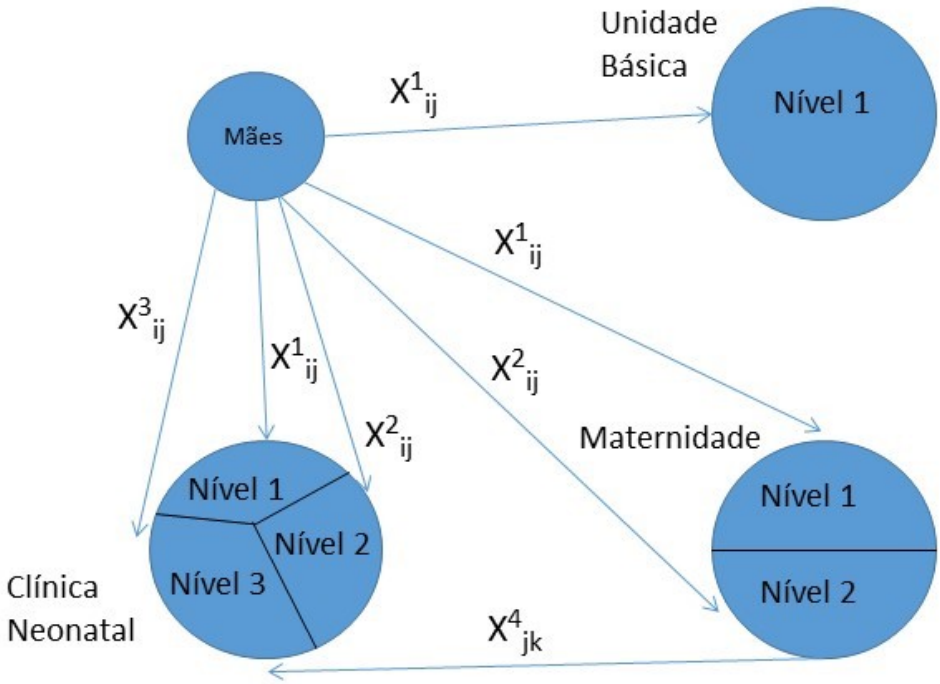


Figura 4 – Exemplo de PLF com níveis hierárquicos

Fonte: Adaptado de Galvão et al. [2002].

tores no fluxo de entrega entre as origens e destinos [Farahani et al., 2013]. Em vez de servir cada par origem-destino de forma direta, *hubs* concentram fluxos para tirar vantagem da economia de escala [Babazadeh and Razmi, 2012]. Diversas empresas no ramo logístico utilizam o conceito de *hubs* para o fluxo de pessoas, informações, produtos, entre outros. Um dos principais exemplos de setor que utiliza esse conceito é o setor de transporte, como empresas de ônibus e companhias aéreas que utilizam *hubs* como locais de conexão para passageiros, otimizando, assim, os custos devido a redução do número de rotas necessárias e aumento da lotação de suas viagens. O uso de *hubs* também é muito comum para transportadoras de carga que os utilizam como locais para desconsolidação de carga de diversas origens e posterior consolidação em um mesmo caminhão com produtos que têm a mesma região como destino. Tais exemplos de utilização de *hubs* têm em comum o objetivo de redução de custos logísticos com a concentração das operações.

Em algumas versões do PLH, também se consideram custos fixos para instalação e operação dos *hubs*, que costumam ser compensados no custo logístico total pela redução de custos de transportes. Os custos de transportes dos PLH para redes de

distribuição levam em consideração os custos para a distribuição da origem até os *hubs*, dos *hubs* até os destinos e entre diferentes *hubs*, para modelos que tem essa característica de conexão entre *hubs*. Nos arcos com *hubs* incide uma taxa de desconto, em decorrência dos ganhos em escala associados ao uso de meios de transportes de maior capacidade.

O artigo de Zgodavova et al. [2018] faz uma análise comparativa entre as redes do setor aéreo com configuração Ponto a Ponto e *Hub-and-Spoke* e são apresentadas as Figuras 5 e 6 para melhor compreensão.

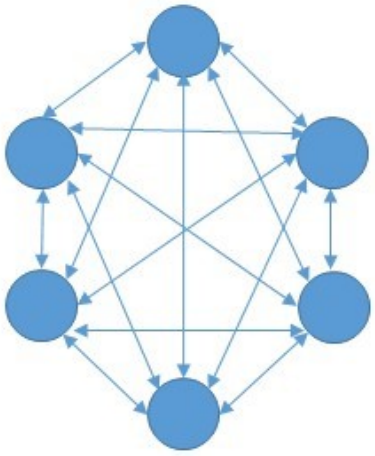


Figura 5 – Configuração Ponto a Ponto

Fonte: Adaptado de Zgodavova et al. [2018].

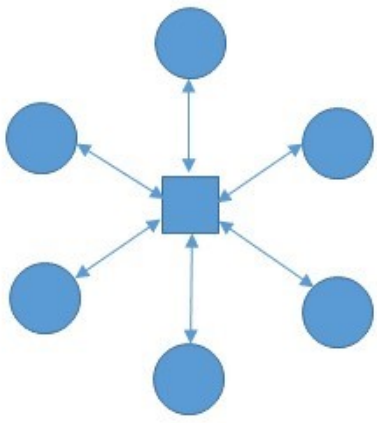


Figura 6 – Configuração *Hub-and-Spoke*

Fonte: Adaptado de Zgodavova et al. [2018].

O modelo Ponto a Ponto é ótimo nas circustâncias em que a distâncias entre duas

cidades é pequena, a demanda entre duas cidades é grande e o número total de cidades atendidas é pequeno. Por outro lado, a configuração *Hub-and-Spoke* é ótima quando as distâncias entre duas cidades é grande, a demanda entre elas é pequena e o número total de cidades atendidas é grande. Assim, observa-se que na configuração *Hub-and-Spoke* existem 6 rotas para operações entre 7 cidades com um *hub* e 6 não *hubs*, enquanto na configuração Ponto a Ponto, 15 rotas são necessárias. No caso do trabalho do autor que tem foco no setor aéreo, os *hubs* são aeroporto principais e os não *hubs*, aeroportos menores.

Além da configuração de *Hub-and-Spoke* apresentada na figura 6, também encontra-se na literatura, como em Ullrich et al. [2012], uma outra configuração, conforme figura 7. Nesta segunda configuração, o ganho de escala ocorre na ligação entre os *hubs*, ao contrário da primeira, em que ocorre no vértice.

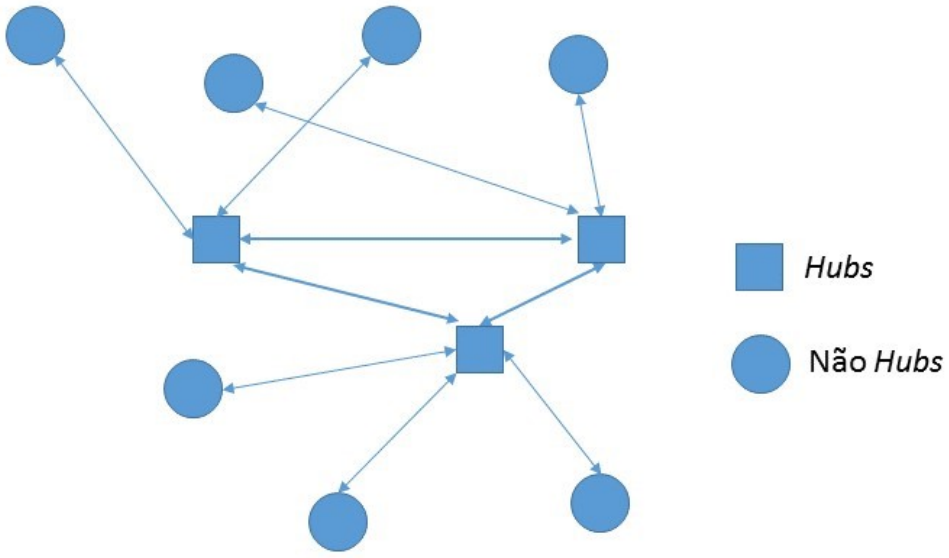


Figura 7 – Configuração *Hub-and-Spoke* com ganho de escala nas ligações

Fonte: Adaptado de Ullrich et al. [2012].

O PLH tem sido amplamente estudado nos últimos anos em função do aumento de operações reais que utilizam o conceito de *hubs* em que os trabalhos investigaram diversos apectos da realidade e os incorporaram aos modelos. Muitos estudos indicaram que a implementação de malhas de transporte com *hubs* melhoraram as operações de distribuição [Chen, 2007]. De acordo com este autor, os fatores fundamentais para a determinação de um modelo de sucesso de distribuição com a utilização de uma malha de transporte com *hubs* são determinar o número ótimo de *hubs*, encontrar a localização

otimizada e fazer a alocação correta dos demais vértices aos *hubs*. Os PLFs podem ter muitas variações como a consideração de capacidades nas instalações, podendo ser ilimitada ou limitada, pode haver um ou múltiplos *hubs*, a passagem de todas as rotas pelos *hubs* pode ser obrigatória ou pode haver a possibilidade de uma entrega direta para parte das rotas, entre outras variedades possíveis.

Alguns exemplos das suas diferentes aplicações são o setor aéreo como em O'Kelly [1986], Aykin [1995] e Ghanmi [2011], telecomunicações como em Kim and O'Kelly [2009], rede de transporte público em Wang et al. (2010), Owsinski et al. [2015] e Zhong et al. [2018], e setor da saúde como em Zarrinpoor et al. [2017].

Além dos setores supracitados, a existência de *hubs* também é muito comum na cadeia de suprimentos, onde têm um papel importante no fluxo de distribuição de mercadorias, possibilitando a concentração do fluxo, o que pode representar uma redução de custos na cadeia de distribuição, como no caso da empresa em estudo neste trabalho.

Encontram-se na literatura muitos trabalhos com o objetivo de apresentar novas formulações para o PLH e resolver estudos de caso, conforme trabalhos apresentados a seguir. O trabalho de Kwon et al. [2006] tem o objetivo de resolver um modelo de Programação Linear Inteira Mista do PLH de uma empresa que fornece serviços de logística, de forma que os *hubs* da empresa, que servem como locais de reconsolidação de carga, sejam alocados para minimizar os custos logísticos totais. Rodríguez et al. [2007] e Rahimi et al. [2015] apresentam formulações matemáticas para o PLH considerando a possibilidade de haver congestionamentos nos *hubs*. Rodríguez et al. [2007] propõe um modelo de Programação Linear Inteira Mista e o segundo, um modelo de Programação Não-linear Inteira Mista que é um trabalho de otimização multiobjetivo, em que além de minimizar o custo total, o objetivo também é de minimizar o tempo de transporte entre cada par origem e destino. Yaman et al. [2007] apresentam um modelo matemático de Programação Não-linear Inteira Mista, também com o objetivo de reduzir o tempo de transporte, considerando o último item a chegar no seu destino e com foco na rede de uma empresa de distribuição da Turquia. Além desses, trabalhos mais recentes apresentam novas possibilidades na formulação de características reais de *hubs* como em Razmi and Rahmanniya [2013], que propuseram uma nova formulação matemática, com um modelo de Programação Linear Inteira Mista, considerando a capacidade dos *hubs* e seu nível de serviço. Chaharsooghi et al. [2016] apresentam um modelo de Programação Estocástica, que leva em consideração a possibilidade de os *hubs* pararem de funcionar

temporariamente e, com isso, a necessidade de realocação dos clientes ou a penalização pela não entrega.

Assim, pode-se observar que o PLH é um problema bastante visitado na literatura, havendo diversos modelos matemáticos e métodos de resolução. O foco e a principal contribuição deste trabalho é a resolução de um problema real e a construção de modelos matemáticos que retratam as características da empresa em diferentes cenários.

Farahani et al. [2013] utiliza algumas definições para classificar os PLH . Neste trabalho apresenta-se o esquema de classificação proposto pelos autores, para mostrar as inúmeras variantes existentes e para melhor definir o modelo matemático da empresa estudada que será mostrado e resolvido mais adiante. Para a última classificação apresentada “Tipos de rotas” foi feita uma adaptação para uma definição apresentada em Farahani et al. [2013], pois neste artigo o autor não considerou rotas diretas que não passam pelos *hubs*, ao contrário do presente trabalho. Abaixo seguem as principais definições usadas no esquema de classificação dos autores:

1. Domínio da solução:
   (a) Rede: todos os nós da rede são candidatos a se tornarem um *hub*.
   (b) Discreto: um subconjunto discreto de nós é candidato a ser tornar *hub*.
   (c) Contínuo: o domínio dos nós dos *hubs* é um plano ou uma esfera.
2. Critérios de otimização:
   (a) Mini-Max: o custo máximo de transporte dos nós de origem para os nós de destino é minimizado.
   (b) Mini-soma: minimiza-se o custo total incorrido com a instalação/operação dos *hubs* e a alocação dos demais nós a eles.
3. Determinação do número de *hubs* a alocar:
   (a) Exógena: o número de *hubs* a alocar é determinado previamente.
   (b) Endógena: o número de *hubs* a alocar é parte da solução.
4. O número de nós que são *hubs*:
   (a) *Hub* único.
   (b) Múltiplos *hubs*.

5. Capacidade do *hub*:
    (a) Não-capacitado (ilimitado).
    (b) Capacitado (limitado).
6. Custo de alocação de *hubs*:
    (a) Sem custo.
    (b) Custo fixo.
    (c) Custo variável.
7. O custo de conexão de nós que não são *hubs* para nós que são *hubs*:
    (a) Sem custo.
    (b) Custo fixo.
    (c) Custo variável.
8. Tipos de rota:
    (a) Sem parada: entrega direta entre a origem e o destino, sem passar por um *hub*.
    (b) Parada em um único *hub*: alocação única.
    (c) Paradas em mais de um *hub*: alocação múltipla.

No Capítulo 5, os modelos matemáticos adaptados para representar as características da empresa serão apresentados. No Capítulo 6 também serão discutidas as características dos modelos matemáticos de acordo com a classificação para o PLH apresentada acima.

2- Métodos de Resolução de Problemas de Programação Inteira Mista

Em função de ser um problema estratégico, cujo impacto nos custos logísticos totais é da ordem de R$1,3 bilhões de reais, se esperam resultados mais próximos possíveis. Por isso, escolheu-se um método capaz de obter ou aproximar uma solução ótima. Nesse sentido, o uso de métodos exatos que forneçam bons limitantes inferiores e superiores para o problema é a alternativa mais adequada.

Além disso, o porte dos programas matemáticos gerados pelas formulações propostas ainda é compatível com a capacidade de hardware e software disponíveis. Assim, escolheu-se a ferramenta *AIMMS* para resolução dos programas matemáticos. Abaixo apresentaremos a definição dos métodos utilizados: Decomposição de Benders, *Branch-and-cut* e *Dynamic Search*.

2.1- Decomposição de Benders

Este método de decomposição foi desenvolvido por por Benders [1962] para resolução de problemas de otimização com dois grupos de variáveis, tal que a fixação do grupo de variáveis ditas complicadoras resulta em um subproblema de mais fácil resolução. É o caso, por exemplo, de problemas de Programação Inteira Mista e alguns problemas Não-Lineares com estrutura especial. Em um problema de Programação Inteira Mista, o método faz a partição das variáveis lineares e inteiras, obtendo um subproblema de Programação Linear. Constrói-se um problema mestre correspondente ao problema original (isto é, cuja solução ótima leva diretamente à solução ótima do problema original). Uma vez que este problema mestre tem um número exponencial de restrições, resolve-se em cada iteração uma relaxação do mestre e, se a solução não for ótima, gera-se um corte violado a partir de resultados da teoria da dualidade. A fixação das variáveis complicadoras em cada iteração e a resolução do subproblema correspondente podem

produzir não apenas um novo corte, mas também, uma solução viável. Desta forma, ao longo das iterações, o método produz limites inferiores e superiores até convergir, dentro de uma tolerância $\varepsilon > 0$, em um número finito de passos. O método considera um problema mestre equivalente, isto é, cujas soluções ótimas também sejam ótimas para o problema original.

O método foi ao longo do tempo sofrendo adaptações e modificações apresentadas na literatura com o objetivo de melhorar sua performance computacional. Geoffrion [1972] generalizou o método de Decomposição de Benders para uma classe mais ampla de programas em que o subproblema gerado não precisa ser um programa linear. Magnanti and Wong [1981] propôs um novo algoritmo com o objetivo de acelerar a convergência do algoritmo em que utiliza técnicas para a escolha de melhores cortes. Lee [1991] desenvolveu um algoritmo adaptado do Método de Decomposição de Benders para resolução de um Problema de Localização de Facilidades Capacitado Multiproduto. Muitos artigos combinam as características de dois ou mais métodos distintos para a geração de um método mais eficiente, como em Lee [1993], que desenvolveu um algoritmo que combina o Método de Decomposição de Benders e a Relaxação Lagrangeana para resolução de um problema multiproduto com escolha do tipo de facilidade. Kůdela and Popela [2015] apresentaram um método combinando um Algoritmo Genético e o Método de Decomposição de Benders para resolver um problema de localização de facilidades binível estocástico. Ghaffarinasab and Kara [2018] fizeram um aprimoramento do algoritmo padrão de Decomposição de Benders através da implementação de refinamentos algorítmicos, como o uso de um novo esquema de desagregação de corte, que foi utilizado para a resolução de duas variantes do PLH.

O Método de Decomposição de Benders foi utilizado em problemas de diversas aplicações em que apresentou bons resultados, destacando-se o seu bom desempenho em PLFs, com diversos trabalhos publicados. Pode-se citar o trabalho de Geoffrion and Graves [1974], um dos mais relevantes na área, em que utilizou o método para a resolução de uma variante do PLF multiproduto, com a restrição de fonte única.

A seguir apresentaremos os fundamentos do Método de Decomposição de Benders conforme descrito por Ladson(1970). O Método de Decomposição de Benders é um método de solução de problemas de programação matemática da seguinte forma:

Problema P1

$$\min \ z = c'x + f(y) \tag{27}$$

Sujeito a:

$$Ax + F(y) \geq b \tag{28}$$

$$x \geq 0, y \in S \tag{29}$$

onde A é uma matriz m x n,x e c são vetores de dimensão n, y é um vetor de dimensão p, f é uma função escalar em y, e F uma função vetorial de dimensão m em y e b um vetor de dimensão m. Idealmente, apenas valores de y para os quais os subproblemas de PL deveriam ser considerados. Ou seja, desejam-se os valores de y pertencentes ao conjunto R, definido em 30:

$$R = \{y| \ \text{existe} \ \ x \geq 0 \ \ \text{tal que} \ \ Ax \geq b–F(y), \ \ y \in S\} \tag{30}$$

Para formular um conjunto de restrições que defina R, utiliza-se o Lema de Farkas.

LEMA DE FARKAS: Existe um vetor $x \geq 0$ que satisfaça $Bx = a$ se, e somente se, $a'x \geq 0$ para todo u que satisfaça $B'u \geq 0$. Aplicando isso ao sistema linear (y fixo):

$$Ax - s = b - F(y) \tag{31}$$

$$x \geq 0, \ \ s \geq 0 \tag{32}$$

conclui-se que y é viável, se e apenas se:

$$(b - F(y))'u \leq 0 \tag{33}$$

para todo u que satisfaça:

$$A'u \leq 0, u \geq 0 \tag{34}$$

Desde que o cone, abaixo, seja um poliedro, ele tem um número finito de geradores:

$$C = \{u \ \mid \ A'u \leq 0, u \geq 0\} \tag{35}$$

Isto é, existem vetores $u_i^r, i = 1, ..., n_r$, tal que qualquer elemento $u \in C$ pode ser escrito como:

$$u = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i u_i^r, \alpha_i \geq 0 \tag{36}$$

Substituindo 37 em 33:

$$\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i (b - F(y))' u_i^r, \leq 0 \tag{37}$$

que vale para todos $\alpha_i \geq 0$ se, e apenas se:

$$(b - F(y))' u_i^r \leq 0, \;\; i = 1, \ldots, n_r \tag{38}$$

Então, um vetor $y \in S$ é viável se, e apenas se, ele satisfaz o sistema finito de restrições (38). Assim, o conjunto R pode ser reescrito como:

$$R = \{y \;\mid\; (b - F(y))'(u_i)^r \leq 0, \;\; i = 1, \ldots, n, \;\; y \in S\} \tag{39}$$

Se R é vazio, o problema P1 original é inviável. Assumindo R não vazio, pode-se reescrever P1 como:

$$\min_{y \in R} \{f(y) + \;\; \min \;\; c'x \;\mid\; Ax \geq b - F(y), x \geq 0\} \tag{40}$$

Dado y fixo, obtêm-se o subproblema primal em (41)-(43) e seu dual de PL em (44)-(46).

Primal

$$\min \;\; c'x \tag{41}$$

Sujeito a:

$$Ax \geq b - F(y) \tag{42}$$

$$x \geq 0 \tag{43}$$

Dual

$$\max \ (b - F(y))'u \tag{44}$$

Sujeito a:

$$A'u \leq c \tag{45}$$

$$u \geq 0 \tag{46}$$

Se $y \in R$, o primal é viável e, pelo teorema da dualidade em programação linear:

$$\min \ \{c'x \ | \ Ax \geq b–F(y), \ \ x \geq 0\} = \max \ \{(b - F(y))'u \ | \ A'u \leq c, \ \ u \geq 0\} \tag{47}$$

A expressão (57) resume o fato de que se o primal é ilimitado, o dual é inviável, enquanto se eles são viáveis, eles têm uma solução “ótima” finita com valores objetivos de mesmo valor.

Substituindo (57) em (40), forma-se uma nova expressão para P1:

$$\min_{y \in R}\{f(y) + \ \ max \ \ (b - F(y))'u \ | \ A'u \leq c, u \geq 0\} \tag{48}$$

Considerando o conjunto de restrições do dual, o poliedro:

$$P = \{u \ | \ A'u \leq c, u \geq 0\} \tag{49}$$

Ele é independente de y e os u_i^r em (35) são seus raios extremos. Se P é vazio, o primal, (41)-(43) é ilimitado, assim como o problema original P1. Se P é não-vazio, o máximo interno em é levado em um ponto extremo de P ou aproxima ao longo do raio extremo de P. A equação (48) acima pode ser reescrita conforme abaixo:

$$\min \ _{y \in R} \ \{f(y) + \ \ \max \ \ (b - F(y))'(u_i)^p\} \tag{50}$$

Tal que u_i^p, i=1,. . . ,n^p, são os pontos extremos do conjunto de restrições do Dual e a expressão (50) pode ser reescrita de forma a obter a formulação do problema mestre de Benders em (50)-(54), onde as restrições (53) definem os cortes gerados para cada

ponto extremo do conjunto dual, enquanto (54) definem os cortes de viabilidade em cada raio extremo do conjunto dual.

$$\min \ z \tag{51}$$

Sujeito a:

$$z \geq f(y) + (b - F(y))' u_i^p, i = 1, \ldots, n_p \tag{52}$$

$$(b - F(y))' u_i^r \leq 0, i = 1, \ldots, n_r \tag{53}$$

$$y \in S \tag{54}$$

Declarações anteriores sobre a relação entre os problemas P1 e P2 são resumidos no teorema a seguir.

TEOREMA 1: (EQUIVALÊNCIA ENTRE P1 E P2)

1. P2 tem solução viável $\Leftrightarrow$ P1 tem solução viável.
2. P2 tem uma solução viável sem ter uma solução ótima $\Leftrightarrow$ P1 tem uma solução viável sem ter uma solução ótima
3. Se (z^*, y^*) resolve P2 e x* resolve o subproblema primal (41)-(43), então, (x^*, y^*) resolve P1 e $z^* = c'x* + f(y^*)$
4. Se (x^*, y^*) resolve P1 e $z^* = c'x^* + f(y^*)$, então, (z^*, y^*) resolve P2.

O número exponencial de vértices e raios extremos do conjunto dual torna proibitiva a resolução direta do mestre. Como no ótimo apenas um subconjunto destas restrições estará ativa, considera-se uma relaxação do mestre na qual apenas os cortes correspondentes a um subconjunto dos pontos e raios extremos é inserido. Resolve-se, então, o mestre relaxado e o correspondente subproblema primal, após o que se testa a otimalidade da solução. Se a solução for ótima, o método para. Do contrário, gera-se mais um corte e repete-se o processo. O corte gerado em cada iteração pode ser de otimalidade ou de viabilidade, dependendo da solução obtida com a resolução do subproblema primal (ou dual).

Para desenvolver o procedimento e garantir que a solução convirja para uma solução ótima, as seguintes premissas são feitas.

Premissa 1: S é fechado e limitado.

Premissa 2: f(y) e os componentes de F(y) são contínuos em S.

Se S é não limitado, limitantes superiores e inferiores nos componentes de y devem ser adicionados, que são tão grandes que são conhecidos por incluir a solução ótima ou qualqquer solução excedendo esses limites não possuem interpretação realística. O lema a seguir é enunciado.

LEMA 1: De acordo com as premissas 1 e 2, se P2 é viável, então z não tem limitante inferior fiito em G se, e apenas se, P em (19) é vazio.

TEOREMA 2: TESTE DE OTIMALIDADE

Se (z^0, y^0) é ótimo para MP2, é ótimo para P2, se e apenas se:

$$\max \ (b - F(y^0))'u \ \mid \ A'u \leq c, u \geq 0 = z^0 - f(y^0) \tag{55}$$

Se não se passa o teste de otimalidade, então:

$$\max \ (b - F(y^0))'u \ \mid \ A'u \leq c, u \geq 0 > z^0 - f(y^0) \tag{56}$$

Se o máximo acima for atingido em um ponto extremo u^0:

$$(b - F(y^0))'u^0 > z^0 - f(y^0) \tag{57}$$

A desigualdade acima afirma que a nova restrição criada pelo ponto extremo u^0, não é satisfeita pela solução para o atual MP2. Um novo MP2 é, então, formado por adicionar essa nova restrição.

Resumo do Algoritmo

O Método de Benders é um método iterativo e de acordo com o resultado da explicação apresentada, a sua sequência de passos é mostrada a seguir:

1. Inicia-se o procedimento resolvendo-se o mestre relaxado MP2, onde poucas ou

nenhuma restrição é incluída.

2. Resolve-se MP2. Se MP2 for inviável, o mesmo ocorre para os problemas P1 e P2. Caso contrário, o problema mestre relaxado terá solução ótima finita (z^0, y^0) ou será ilimitado. Neste último caso, torna-se y^0 arbitrário em S, antes de prosseguir para o passo 3.

3. Resolve-se o problema Dual (44)-(46), e, caso ele seja inviável, o problema original P1 é ilimitado. Se o dual for ilimitado, segue-se para o passo 6.

4. Se o valor objetivo ótimo encontrado no passo anterior for igual a $z^0 - f(y^0)$, e se x' resolve o primal (41)-(43), para y^0 fixado, então (x^0,y^0) resolve P1. Ou seja, $(x^0, y^0) = (x^*, y^*)$ é solução ótima de P1.

5. Se o teste de otimalidade do passo 4 falhar e o dual (44)-(46) tiver solução ótima finita u^0, para y^0 fixo, então:

$$z^0 < f(y^0) + (b - F(y^0))'u^0 \tag{58}$$

Pode-se dizer, então, que o resultado do lado direito da inequação 58 é um limite superior de z.

Vê-se assim que a solução atual viola o corte de Benders 59, que é então incluído no problema mestre relaxado MP2.

$$z \geq (b - F(y))'u^0 + f(y) \tag{59}$$

Resolvendo-se novamente o MP2, encontra-se um limitante inferior z e um novo vetor y' a ser fixado. A seguir, retorna-se ao passo 2.

6. Se o problema Dual (44)-(46), tem uma solução ilimitada, a solução objetivo do Dual aproxima-se de $+\infty$, ao longo da semi reta u definida pelo raio v e o ponto extremo u'. Ou seja, $u = u^0 + \alpha v^0$, tal que $\alpha \geq 0$.

A inequação abaixo é satisfeita:

$$(b - F(y^0))'v^0 > 0 \tag{60}$$

Se $\alpha \to +\infty$, então:

$$(b - F(y^0))' u^0 \to +\infty \tag{61}$$

ao longo da semi reta definida por u^0 e v^0.

Conclui-se assim que, $y = y^0$ não satisfaz a restrição:

$$(b - F(y))' v^* \leq 0 \tag{62}$$

Logo, o corte 62 deve ser adicionado a MP2. Além disso, se for válida a desigualdade 63, pode-se adicionar também um corte da forma 59 em MP2.

$$z^0 < f(y^0) + (b - F(y^0))' u^0 \tag{63}$$

Inseridas as restrições que forem possíveis, retorna-se ao passo 2.

Ao longo das iterações do método os limitantes inferior e superior são melhorados até que convirjam dentro de uma tolerância pré-definida, $\varepsilon > 0$, para uma solução ótima (x^*, y^*). Além disso, o método converge em um número finito de passos que acontece diretamente do fato de haver um número finito de restrições de P2, conforme teorema abaixo.

TEOREMA 3: O procedimento iterativo termina com um número finito de iterações, com a informação de que P1 é inviável, ilimitado ou com uma solução ótima para P1.

A prova vem do fato de que P2 tem um número finito de restrições. Se não passar no teste de otimalidade, então uma ou mais restrições são adicionadas ao MP2. Assim, em um número finito de iterações, passa-se no teste de otimalidade ou um conjunto de restrições é obtido, em que se passa no teste no passo seguinte. P1 é inviável se, e apenas se, MP2 for inviável em alguma etapa e P1 é ilimitado se, e apenas se, o programa linear dual (44)-(46) for inviável.

Resolvendo um problema numérico de localização de facilidades não-capacitado.

$$\min \; Z = \sum_i f_i Y_i + \sum_i \sum_j C_{ij} X_{ij} \tag{64}$$

Sujeito a:

$$\sum_i X_{ij} \geq 1, \;\; para \;\; j \in J \tag{65}$$

$$0 \leq X_{ij} \leq Y_i, \;\; para \;\; i \in I, j \in J \tag{66}$$

$$Y_i \in \{0,1\}, \;\; para \;\; i \in I \tag{67}$$

Fixando $Y = (y_1, \ldots, y_m)$, então (64)-(66) é linear. A decomposição de Benders adiciona restrições ao programa inteiro MP2 pela resolução do dual de (64)-(66), que é:

$$\max \;\; Z = \sum_j V_j - \sum_i \sum_j Y_{ij} U_{ij} \tag{68}$$

Sujeito a:

$$V_j - U_{ij} \leq C_{ij} \tag{69}$$

$$V_j \geq 0, \;\; U_{ij} \geq 0 \tag{70}$$

O poliedro P é o conjunto de todos $\{V_j, U_{ij}\}$ satisfazendo (69)-(70), e o Problema P2 é:

$$\min \;\; Z \geq \sum_i V_i^p - \sum_i \sum_j U_{i^p j} Y_i + \sum_i F_i Y_i \tag{71}$$

Sujeito a:

$$\sum_i V_i^r - \sum_i \sum_j U_{ij}^r Y_i \leq 0 \tag{72}$$

$$Y_i \in \{0,1\} \tag{73}$$

As inequações (72) são necessárias e suficientes para y ser factível, isto é, para admitir valores factíveis de X_{ij} em (64)-(66). Porém, de acordo com as equações (64)-(66), qualquer $y \neq 0$ é factível, então, (72) pode ser retirado se a condição $y \neq 0$ for garantida.

O algoritmo pode ser iniciado com algumas ou nenhuma restrição da forma (71) no problema P2. Deixando a solução para o problema MP2 ser y^0. Os problemas primal e dual devem ser resolvidos. Deixando o conjunto atual de CDs abertos ser:

$$I = \{i \quad | \, Y_i^0 = 1\} \tag{74}$$

Assumindo que $Y \neq 0$, então I não é vazio. O primal (64)-(66) então se torna:

$$\min \sum_i \sum_j C_{ij} X_{ij} \tag{75}$$

Sujeito a:

$$\sum_i X_{ij} \geq 1, X_{ij} \geq 0 \tag{76}$$

Como $C_{ij} \geq 0$, (76) mantém uma igualdade em uma solução ótima. Como as restrições (76) são independentes, a solução é obtida com $X_{ij} = 1$ no qual C_{ij} é mínimo e zero, ao contrário, isto é:

$$X_{k_j j}^0 = 1, \text{onde } C_{k_j j} = \min \; C_{ij} \tag{77}$$

$$X_{ij}^0 = 0, \text{caso contrário} \tag{78}$$

Essa solução atende o cliente j da fonte mais barata, k_j. Para obter a solução dual correspondente:

$$V_j = U_{k_j j} + C_{k_j j} \tag{79}$$

As restrições dual remanescentes são:

$$U_{ij} \geq 0 \tag{80}$$

$$U_{ij} \geq V_j - C_{ij}, \;\; i \neq k_j \tag{81}$$

Substituindo (79) na função objetivo dual (68), percebe-se que esse objetivo é independente de $U_{k_j j}$ aparece duas vezes com sinais opostos. Assim, $U_{k_j j} = 0$. Para

maximizar os termos remanescentes, U_{ij} devem ser feitos como o menor possível sujeito a (80)-(81), isto é, deve ser colocado igual aos valores máximos do lado direito. Isso produz a solução dual ótima:

$$V_j^0 = C_{k_j j} \tag{82}$$

$$U_{ij}^0 = \max\left\{0, V_j^0 - C_{ij}\right\}, \quad i \neq k_j \tag{83}$$

Deixando d^0 ser o valor objetivo dual ótimo e z^0 o valor ótimo obtido em resolver MP2. Se

$$d^0 = z^0 - \sum_i F_i Y_i^0 \tag{84}$$

então, a solução atual é ótima. Caso contrário, forma-se uma nova restrição com $\left\{V_j^0, U_{ij}^0\right\}$,

$$z \geq \sum_i V_i^0 - \sum_i \sum_j U_{ijY_i}^0 + \sum_i F_i Y_i \tag{85}$$

e adiciona-se ao MP2.

Considerando um exemplo com quatro CDs e clientes, $F_i = 7$ para todo i, e:

$$\mathbf{C_{ij}} = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 20 & 18 \\ 12 & 0 & 8 & 6 \\ 20 & 8 & 0 & 6 \\ 18 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Inicialmente MP2 não tem restrições. Escolhendo $y^0 = (0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0)$ e $z^0 = -\infty$. Resolvendo os programas lineares primal (64)-(66) e dual (68)-(70), tem-se:

$$\sum_i \sum_j C_{ij} X_{ij}^0 + \sum_i F_i Y_i^0 = 33 \tag{86}$$

$v_1^0 = 12$, $v_2^0 = 0$, $v_3^0 = 8$, $v_4^0 = 6$, $u_{11}^0 = 12$, $u_{33}^0 = 8$, $u_{44}^0 = 6$, todos os outros $u_{ij}^0 = 0$.

O problema inicial MP2 é:

$$z \geq 26 - 5y_1 + 7y_2 - y_3 - y_4 \tag{87}$$

$$Y_i \in \{0, 1\} \tag{88}$$

A solução ótima minimiza o lado direito da restrição acima, deixando $Y_i = 1$ para coeficientes negativos e zero caso contrário e $Y^0 = (1\ \ 0\ \ 1\ \ 1)$:

com valor ótimo objetivo:

$$z^0 = 19 \tag{89}$$

O valor em (86) é um limite superior ao ótimo e (89), um limite inferior. Como eles não são iguais, a solução atual não é ótima.

Resolvendo o primal e o dual com y com o valor acima, tem-se:

$$\sum_i \sum_j C_{ij} X_{ij}^0 + \sum_i F_i Y_i^0 = 27 \tag{90}$$

$v_1^0 = v_3^0 = v_4^0 = 0$, $v_2^0 = 6$, $u_{22}^0 = 6$, todos os outros $u_{ij}^0 = 0$.

A nova restrição a ser adicionada é:

$$z \geq 6 + 7y_1 + y_2 + 7y_3 + 7y_4 \tag{91}$$

e o novo problema MP2 é de minimização de z sujeito a (87), (88) e (91). Esse problema é equivalente a:

$$\min_{y_i = 0 \ \text{ou} \ 1} \ \max\{rhs(2), rhs(6)\} \tag{92}$$

a solução pode ser encontrada por enumeração a ser:

$$Y^0 = (1\ \ 0\ \ 0\ \ 1) \ \text{ ou } \ Y^0 = (1\ \ 0\ \ 1\ \ 0), \ \ z^0 = 20 \tag{93}$$

A tabela 1 resume o comportamento do algoritmo neste problema. Em uma coluna da tabela, y^0 é uma solução ótima ao problema MP2 cujas restrições são dadas em todas as linhas acima, com valor objetivo ótimo y^0 dado na linha imediatamente acima. A segunda coluna é o custo mínimo para (88)-(91) dado que $y = y^0$ e é um limite superior no custo mínimo. O valor z^0 é um limite inferior. Os coeficientes a_0 a a_4 na tabela fazem parte da inequação $z \geq (a_0) + (a_1)y_1 + (a_2)y_2 + (a_3)y_3 + (a_4)y_4$.

Tabela 1 – Exemplo numérico da Decomposição de Benders

$y^0 = (y_1^0, y_2^0, y_3^0, y_4^0)$	$\sum_i \sum_j C_{ij} + \sum_i F_i Y_i^0$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	z^0
(0 1 0 0)	33	26	-5	7	-1	-1	19
(1 0 1 1)	27	6	7	1	7	7	20
(1 0 0 1)	26	12	7	1	1	7	20
(1 0 1 0)	28	14	7	-1	7	-1	21
(1 0 0 0)	57	50	7	-29	-29	-31	24
(0 0 1 1)	38	24	-11	-5	7	7	26
(1 0 0 1)	26						

Fonte: Ladson (1970)

2.2- *Branch-and-Cut*

A apresentação da teoria de *Branch-and-Cut* será baseado no livro Arenales et al. [2007]. O método *Branch-and-Cut* é um algoritmo que incorpora a geração de planos de corte em cada nodo da árvore de busca explorada pelo método *Branch-and-Bound*, na expectativa de melhorar os limitantes obtidos e, assim, reduzir o esforço de enumeração. Podem ser usadas para isso diversas famílias de cortes, muitas das quais específicas por problema ou formulação. Porém, nos programas para resolução de problemas gerais de Programação Inteira são usadas famílidas de cortes válidas para quaisquer programas inteiros como, por exemplo, os cortes inteiro e misto de Gomory. Não se pretende fazer uma extensa revisão sobre o método *Branch-and-Cut* e das famílias de cortes usualmente aplicadas, mas sim descrever os fundamentos centrais do método. Assim, apresenta-se, primeiramente, a teoria do método de *Branch-and-Bound*.

2.2.1 *Branch-and-Bound*

Considerando o problema de programação inteira mista:

$$\min \ z = c'x + f(y) \tag{94}$$

Sujeito a:

$$Ax + F(y) \geq b \tag{95}$$

$$x \geq 0, y \in S \tag{96}$$

cujos vetores e matrizes já foram definidos na apresentação da subseção anterior de Decomposição de Benders.

Se o poliedro $\bar{P} = \{Ax \geq b, x \in R^n_+\}$ for fechado, então o número de soluções inteiras factíveis é finito. Porém, apesar do número de soluções ser finito, ele é exponencial em relação aos dados de entrada, o que inviabiliza sua enumeração explícita. Uma forma de reduzir o esforço computacional é pela enumeração implícita em que utiliza-se o resultado do problema de programação linear para considerar e descartar subconjuntos de soluções, pois não contém uma solução ótima ou contém soluções ótimas distintas, mas de mesmo valor ótimo. O problema original P é dividido em problemas menores de mais fácil resolução para gerar esse subconjunto de soluções. Assim, o método *Branch-and-Bound* cria partições disjuntas do espaço de solução, cuja união contenha todas as soluções originais. A seguir, aquelas partições que provadamente não contiverem a solução ótima, são desconsideradas, enquanto as demais partições são refinadas através de sua divisão em novas partições, num processo chamado de ramificação. O nome do método deriva deste processo de ramificação e descarte dos subproblemas que provadamente não contiverem a solução.

No método, ao realizar partições, para organizar uma busca, usa-se uma estrutura de árvore, na qual as partições representam os nós da árvore, e as ligações entre os nodos indicam uma relação de ”descendência”, segunda a qual um nodo ”filho”possui todas as restrições do ”pai” mais uma restrição, isto é, mais a restrição que foi usada para dividir a partição do pai em partições menores e disjuntas.

Para melhor ilustração dos conceitos do *Branch-and-Bound*, o exemplo numérico abaixo é mostrado.

$$z = \max \ 5x_1 - x_2 \tag{97}$$

Sujeito a:

$$7x_1 - 5x_2 \leq 13 \tag{98}$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 17 \tag{99}$$

$$x \in Z_+^2 \tag{100}$$

A figura 8 mostra a região factível do problema P, a direção do gradiente da função objetivo (5,-1) e a solução ótima do problema relaxado PL, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (3\frac{29}{22}, 2\frac{22}{29})$ com valor $\bar{z} = 16\frac{11}{29}$, limitante superior para o valor ótimo z.

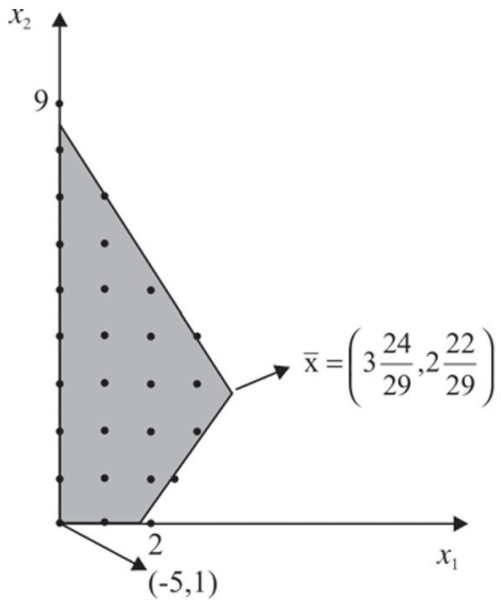


Figura 8 – Representação gráfica das soluções de P e PL.

Fonte: Arenales et al. [2007]

Adiciona-se a restrição $x_1 \leq \lfloor x_1 \rfloor = 3$ para gerar o problema P^1 e a restrição $x_1 \geq \lceil x_1 \rceil = 4$ para gerar o problema P^2. Essa partição pode ser representada por uma árvore em que cada nó corresponde a um problema, conforme figura 9. Os nós descendentes do nó P, P^1 e P^2 são denominados de nós *filhos* e diz-se que a variável x_1 foi ramificada.

A figura 10 mostra o espaço das soluções de P^1 e P^2, em que P^2 é vazio e pode ser eliminado. A solução ótima da relaxação linear é $\bar{x}_1 = (3, 1\frac{3}{5})$ com $z^1 = 13\frac{2}{5}$ que é um limitante superior mais próximo do valor ótimo de P.

Faz-se a partição do problema P^1 em dois problemas P^3 e P^4 adicionando a restrição $x_2 \leq \lfloor 1\frac{3}{5} \rfloor = 1$ para gerar o problema P^3 e a restrição $x_2 \geq \lceil 1\frac{3}{5} \rceil = 2$ para gerar P^4, conforme mostrado na figura 11.

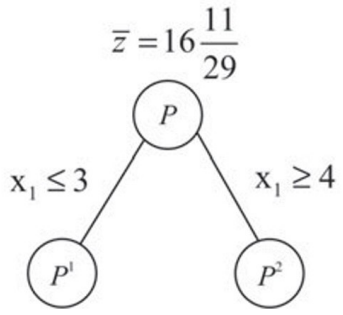


Figura 9 – Partição do problema P.

Fonte: Arenales et al. [2007]

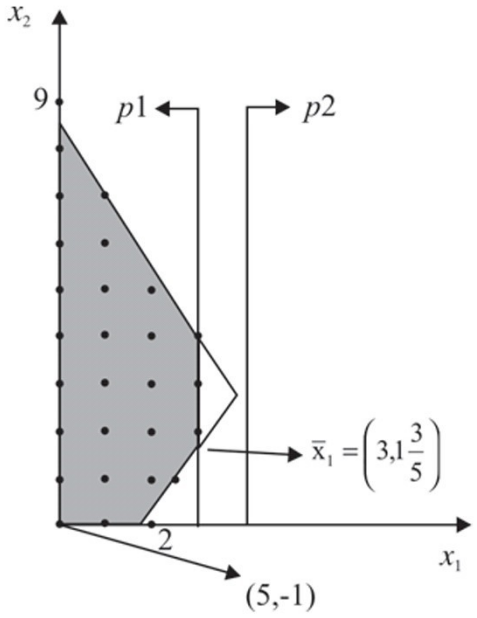


Figura 10 – Representação gráfica das soluções de P^1.

Fonte: Arenales et al. [2007]

A relaxação linear de P^4 tem solução ótima $\bar{x}_4 = (3, 2)$, que é uma solução inteira com $\bar{z}^4 = 13$ e a relaxação linear de P^3 tem solução ótima $\bar{x}_3 = (2\frac{4}{7}, 1)$, com valor $\bar{z}^3 = 11\frac{6}{7}$. Como $\bar{z}^3 < \bar{z}^4$, conclui-se que a solução $\bar{x}_4 = (3, 2)$ é a solução ótima do problema P. A figura 12 mostra o espaço das soluções de P^3 e P^4, e a solução ótima $\bar{x}_4$.

Durante a resolução de um problema pelo método *Branch-and-Bound* são feitos testes para eliminação de nós na árvore *Branch-and-Bound* segundo três critérios:

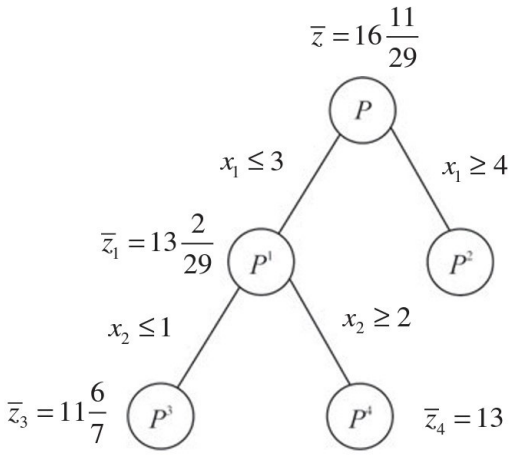


Figura 11 – Partição do problema P^1.

Fonte: Arenales et al. [2007]

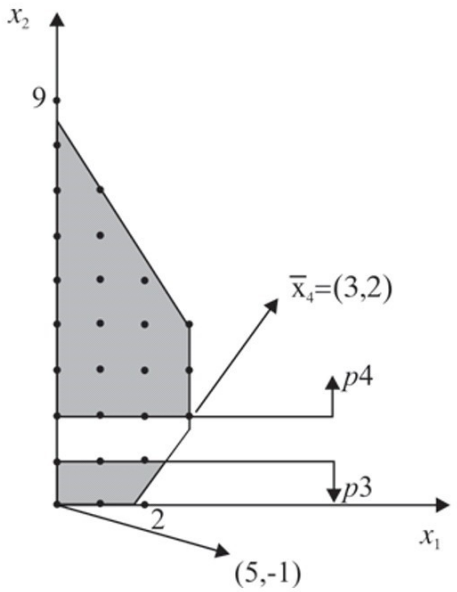


Figura 12 – Representação gráfica das soluções de P^3 e P^4.

Fonte: Arenales et al. [2007]

1. Infactibilidade: A resolução da relaxação de programação linear do problema não tem solução viável.

2. Qualidade: O resultado obtido tem valor da solução objetivo menor que um outro

valor já encontrado previamente, no caso de problemas de maximização.

3. Otimalidade: Quando a solução ótima da programação linear é inteira, o valor ótimo do problema da programação linear é igual ao valor ótimo do problema.

Seleção de nós na árvore *branch-and-bound*:

Durante a resolução do método *Branch-and-Bound*, existem duas alternativas para a escolha do próximo nó a ser examinado. Existem as regras *a priori*, que determinam previamente a ordem de escolha dos nós e as regras adaptativas, que determinam o nó a partir da informação dos nós ativos. A regra *a priori* mais utilizada é a busca em profundidade com *backtracking*, em que o último nó incluído na lista é o primeiro a ser examinado. Na busca em profundidade, se o nó examinado atual não é eliminado, o próximo a ser examinado é um dos seus filhos. O termo *backtracking* significa que quando um nó é eliminado, retorna-se ao longo do caminho em direção ao nó raiz até encontrar o primeiro nó que tem um filho que não foi examinado. A principal vantagem da busca em profundidade reside na possibilidade de reduzir o custo de seleção dos nodos e de resolução da relaxação de programação linear correspondente, pois a lista de nodos a serem explorados é organizada segundo uma disciplina FIFO. Desta forma, o próximo nodo a ser explorado, é, muito provavelmente, o último a entrar na lista. Isso não só facilita a escolha do próximo nodo como também permite que a solução ótima do nodo pai sirva de solução inicial para o méodo dual simplex na resolução do nodo filho. Desta forma, o número esperado de iterações simples tender a ser consideravelmente menor. Outra vantagem é que o método tem maior chance de encontrar soluções viáveis logo nas primeiras iterações do algoritmo, porém, é usual que tenham baixa qualidade, uma vez que a função objetivo é completamente desconsiderada no processo de escolhoda dos nós. Outra desvantagem é o aumento do número de nodos ativos, pois as soluções viáveis de baixa qualidade encontradas ao longo da busca têm, via de regra, baixo poder de poda.

Já uma regra adaptativa muito utilizada consiste em selecionar o nó que tem o maior limitante superior. Assim, quando a solução da relaxação de programação linear em algum dos nodos for inteira viável é de se esperar que ela seja de boa qualidade, o que aumenta o poder de poda do método, ajudando, assim, a conter o aumento acelerado da árvore de busca. Assim, um fato crucial para a eficiência do método *Branch-and-Bound* é

a qualidade do limitante superior, isto é, o *gap* dual em relação ao valor ótimo em cada nó.

Ao contrário da regra *a priori*, a vantagem da regra adaptativa é que, em geral, produz uma árvore com um número bem menor de nós, porém, sua desvantagem é o armazenamento de um número muito grande de nós ativos.

Além das regras para seleção de nós da árvore discutidas, existem outras, conforme apresentado em Achterberg et al. [2005]. Neste trabalho, os autores discutem algumas regras de ramificação como a Ramificação Mais Inviável, Ramificação *Pseudocost*, Ramificação Forte e outras que são hibridizações das duas anteriores. O livro de Wolsey [1998] também apresenta mais explicações sobre regras de ramificação e é uma opção de referência para mais informações sobre o método *Branch-and-Bound*. Na figura 13 mostra-se um fluxograma do método *Branch-and-Bound* do livro de Wolsey [1998] e em seguida apresenta-se o Algoritmo do Planos Cortantes que também basea-se na mesma referência.

2.3- Algoritmo de Planos Cortantes

Algoritmos de planos cortantes buscam obter uma aproximação da envoltória convexa da região factível de um problema de programaçãointeira que contenha um ponto extremo correspondente a uma solução ótima. Essa aproximação é obtida por meio de cortes ou desigualdades válidas [Arenales et al., 2007].

DEFINIÇÃO 1: Uma desigualdade $\pi x \leq \pi_0$ é uma desigualdade válida para $X \subseteq R^n$ se $\pi x \leq \pi_0$ para todo $x \in X$.

Se $X = \{x \in Z^n : Ax \leq b\}$ e conv$(X) = \{x \in R^n : \tilde{A}x \leq \tilde{b}\}$, as restrições $a^i \leq b_i$ e $\tilde{a}^i x \leq \tilde{b}_i$ são claramente desigualdades válidas para X.

Assim, duas questões importantes são (i) Quais são as desigualdades válidas boas ou úteis?; (ii) Se um conjunto de famílias de desigualdades válidas para um problema é conhecido, como pode-se usá-las na tentativa de resolver uma instância em particular?

A seguir apresenta-se um exemplo de uma desigualdade válida:

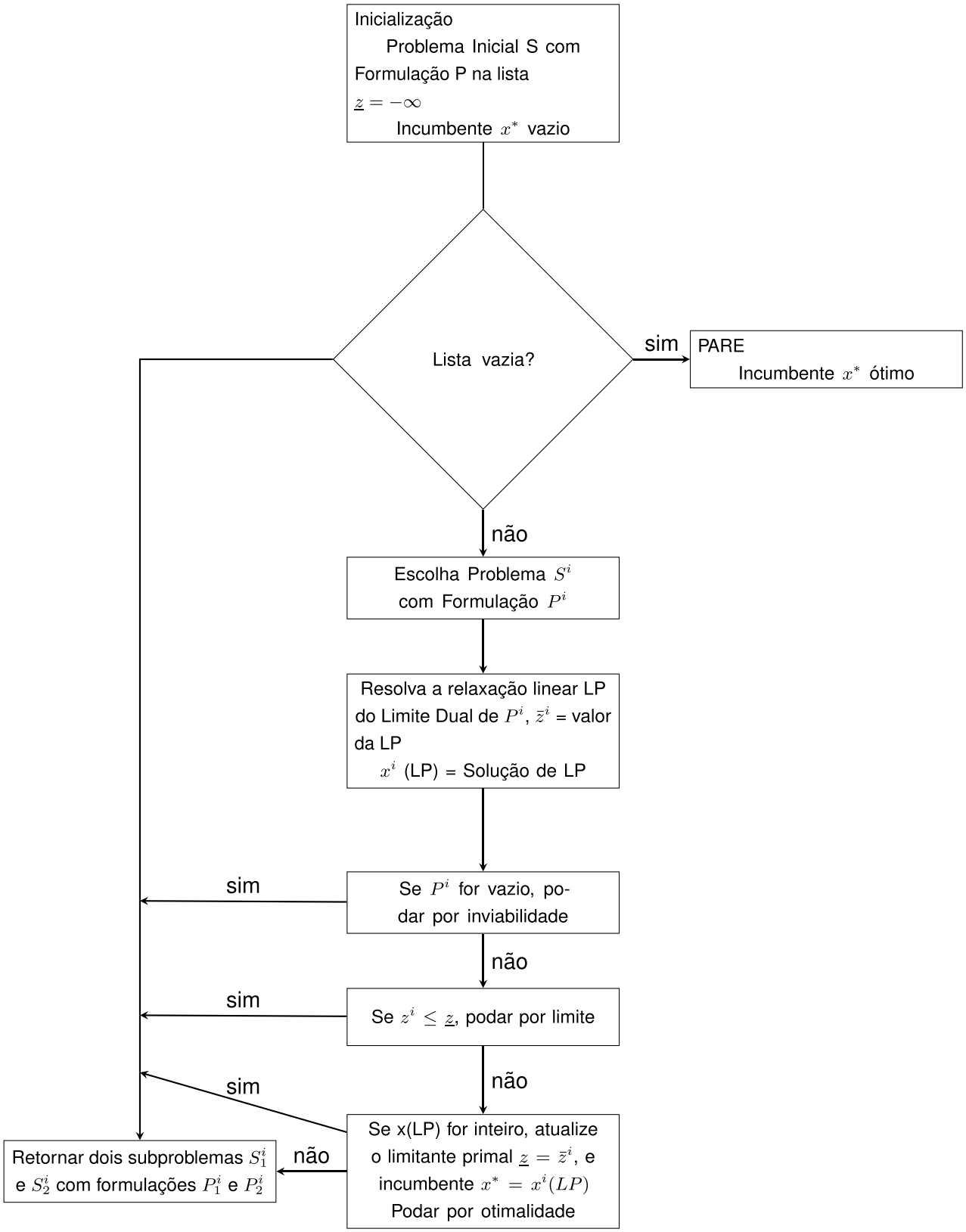


Figura 13 – Fluxograma do método Branch-and-Bound

Fonte: Wolsey [1998]

Considerando um conjunto inteiro misto $X = \{(x, y) : x \leq 10y,\ \ 0 \leq x \leq 14,\ \ y \in Z_+^1\}$, verifica-se a validade da desigualdade $x \leq 6 + 4y$, ou escrito de outra forma, $x \leq 14 - 4(2 - y)$.

Na figura 14 apresenta-se graficamente, em que a adição da desigualdade $x \leq 6 + 4y$ resulta no casco convexo de X.

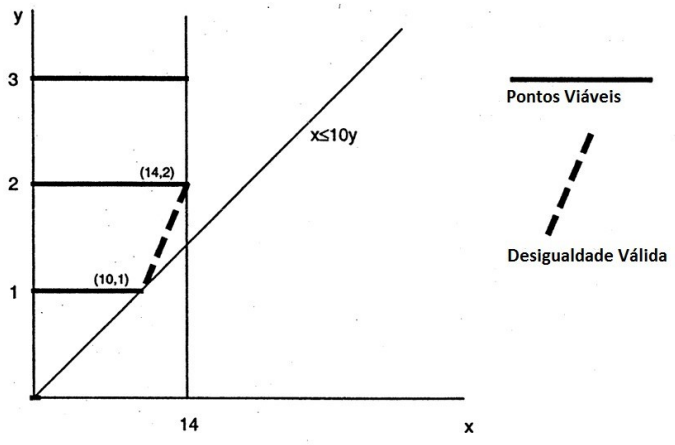


Figura 14 – Desigualdade Inteira Mista

Fonte: Wolsey [1998]

Para entender como gerar desigualdades válidas para Programação Inteira, é necessário entender desigualdades válidas para poliedros (programação linear).

PROPOSIÇÃO 1: $\pi x \leq \pi_0$ é válido para $P = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\} \neq 0$, se, e apenas se, existe $u \geq 0$, $v \geq 0$ como $uA - v = \pi$ e $ub \leq \pi_0$, ou alternativamente existe $u \geq 0$ tal que $uA \geq \pi$ e $ub \leq \pi_0$.

Prova: Pela dualidade da Programação Linear, max $\{\pi x : x \in P\} \leq \pi_0$, se, e apenas, se min $\{ub : uA - v = \pi, u \geq 0, v \geq 0\} \leq \pi_0$.

Assim, considerando a região viável para uma Programação Inteira $\{x : Ax \leq b, x \in Z_+^n\}$:

PROPOSIÇÃO 2: Se $X = \{y \in Z^1 : y \leq b\}$, então, a desigualdade $y \leq \lfloor b \rfloor$ é válida para X.

O procedimento de *Chvátal-Gomory* pode ser usado para construir uma desigualdade válida para o conjunto $X = P \cap Z^n$, onde $P = \{x \in R_+^n : Ax \leq b\}$, A é uma matriz (mxn) com colunas $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, e $u \in R_+^m$:

(i) A desigualdade $\sum_j ua_j x_j \leq ub$ é válida para P com $u \geq 0$ e $\sum_j a_j x_j \leq b$,

(ii) A desigualdade $\sum_j \lfloor ua_j \rfloor x_j \leq ub$ é válida para P com $x \geq 0$,

(iii) A desigualdade $\sum_j \lfloor ua_j \rfloor x_j \leq \lfloor ub \rfloor$ é válida para X com x inteiro, e então $\sum_j \lfloor ua_j \rfloor x_j$ é inteiro.

TEOREMA 4: Toda desigualdade válida para X pode ser obtida pela aplicação do procedimeno de *Chvátal-Gomory* uma quantidade finita de vezes.

AFIRMAÇÃO 1: A desigualdade $\pi x \leq \pi_0 + t$ é uma desigualdade válida para P para algum $t \in Z_+^1$.

AFIRMAÇÃO 2: Existe um número inteiro M suficientemente grande tal que a desigualdade a seguir é válida para P para toda partição (N^0, N^1) de N.

$$\pi x \leq \pi_0 + M \sum_{j \in N^0} x_j + M \sum_{j \in N^1} (1 - x_j) \tag{101}$$

AFIRMAÇÃO 3: Se $\pi x \leq \pi_0 + \gamma + 1$ for uma desigualdade de *Chvátal-Gomory* para X com $\gamma \in Z_+^1$, então a equação abaixo é uma desigualdade de *Chvátal-Gomory* para X.

$$\pi x \leq \pi_0 + \gamma + \sum_{j \in N^0} x_j + \sum_{j \in N^1} (1 - x_j) \tag{102}$$

AFIRMAÇÃO 4: Se as desigualdades a seguir são desigualdades de *Chvátal-Gomory* para X tal que (T^0, T^1) é qualquer partição de $\{1, \ldots, p-1\}$, então a desigualdade a seguir é uma desigualdade de *Chvátal-Gomory* para X.

$$\pi x \leq \pi_0 + \gamma + \sum_{j \in T^0 \cup \{p\}} x_j + \sum_{j \in T^1} (1 - x_j) \tag{103}$$

$$\pi x \leq \pi_0 + \gamma + \sum_{j \in T^0} x_j + \sum_{j \in T^1 \cup \{p\}} (1 - x_j) \tag{104}$$

AFIRMAÇÃO 5: Se a desigualdade $\pi x \leq \pi - 0 + \gamma + 1$ é uma desigualdade de *Chvátal-Gomory* para X, então $\pi x \leq \pi - 0 + \gamma$ também é uma desigualdade de *Chvátal-Gomory* para X.

Exemplos numéricos, assim como as provas para o Teorema 3 e para as Afirmações

de 1 a 5 podem ser encontradas no livro de Wolsey [1998].

Para fazer a adição de restrições *a priori*, examinando a formulação inicial $P = \{x : Ax \leq b, \ \ x \geq 0\}$ com $X = P \cap Z^n$, encontra-se um conjunto de desigualdades válidas $Qx \leq q$ para X, adiciona-se essas desigualdades para a formulação inicial, obtendo-se uma nova formulação $P' = x : Ax \leq b, \ \ Qx \leq q, \ \ x \geq 0$ com $X = P' \cap Z^n$. Assim, pode-se aplicar um algorimo como *Branch-and-Bound*.

As vantagens são que se as desigualdades válidas forem bem escolhidas, a formulação P' é significativamente menor que P, os limites devem ser melhorados e com isso, o algoritmo *Branch-and-Bound* deve ser mais efetivo e as chances de encontrar soluções inteiras viáveis são maiores. A desvantagem é que usualmente a família de desigualdades válidas que adiciona-se é enorme, levando-se muito tempo para obter uma solução.

Para que as desigualdades válidas sejam avaliadas *a priori* em muitas instâncias a região viável X pode ser escrita naturalmente como a interseção de dois ou mais conjuntos, $X = X^1 \cap X^2$.

Existem diferentes algoritmos de planos de cortes, entre eles O Algoritmo de Planos de Cortes de Gomory, os Cortes Inteiros Mistos que podem ser classificados em Desigualdades Inteiras Mistas básicas e Desigualdades de Arrendondamento de Números Inteiros Mistos, Cortes Inteiros Mistos de Gomory e Desigualdades Disjuntivas. Um maior detalhamento sobre o funcionamento de cada um, pode ser encontrado no livro de Wolsey [1998].

2.4- *Dynamic Search*

O *Dynamic Search* é o nome de um algoritmo disponível no CPLEX 12.7.1 para resolução de Problemas de Programação Inteira Mista disponibilizado na ferramenta AIMMS. Segundo o manual do CPLEX, CPLEX [2015], o algoritmo consiste nos mesmos blocos de contrução que o *Branch-and-Cut*: relaxação linear, ramificação e cortes. Encontra-se na literatura alguns trabalhos que utilizaram o *Dynamic Search* em que este algoritmo teve um melhor desempenho que o *Branch-and-Cut* presente no *CPLEX*. Sousa [2018] apresenta um estudo de caso de uma distribuição multiproduto na indústria de

moda e varejo com objetivo de redução de custos, em um problema que foi modelado como uma programação linear inteira mista e para sua resolução, o *CPLEX* é utilizado. É feita uma comparação entre o *Branch-and-Cut* e o *Dynamic Search*, e o último atinge a solução de forma mais rápida. O artigo de Ostrowski et al. [2010] também faz uma comparação dos métodos *Branch-and-Cut* e *Dynamic Search* presentes no *CPLEX* para modelos de programação linear inteira mista, em que o *Dynamic Search* obteve melhores resultados com menores tempos. O artigo de Zhou et al. [2012] não faz uma comparação entre métodos de resolução, porém, utiliza o *Dynamic Search* para a resolução de um modelo de programação inteira mista para um problema de escalonamento robótico multi-cíclico.

3- Desenho Metodológico

Na figura 15 é apresentado o fluxograma com os passos da metodologia usada na dissertação.

A primeira etapa do trabalho foi a a contextualização e delimitação do problema. Para isso, foram realizadas entrevistas com alguns gestores da empresa para entendimento das suas características. Durante essa etapa foi possível entender a forma como é definida a demanda das suas lojas, como acontece a definição da quantidade para a separação diária dos produtos nos CDs, a quantidade atual de CDs e as regiões atendidas por cada um deles, o plano de expansão das lojas, entre outros.

A segunda etapa do trabalho foi uma revisão da literatura sobre o PLF. Nesta etapa, conforme capítulo 1 apresentado, foi feita uma breve revisão dos modelos de localização de facilidades cujas premissas são similares àquelas que aparecem nos problemas que se deseja resolver.

Após a etapa de revisão da literatura, foi possível escolher os modelos matemáticos do PLF existentes na literatura que embasaram de forma mais direta o modelo escrito para representar as principais características da empresa. Os modelos escolhidos foram o Problema de Localização de Facilidades Multiproduto, por ser uma variante do PLF que representa o fluxo de mais de um produto, característica fundamental já que o problema real é multiproduto. Este modelo é necessário, pois os *hubs*, estoques avançados, foram modelados de forma a possuir apenas uma família de produtos, com maior valor agregado. Para inclusão dos *hubs* na rede de distribuição da empresa, foi utilizado o Problema de Localização de Facilidades Multi-elos que representa uma cadeia de suprimentos com facilidades em diferentes níveis. Para todas as variantes utilizadas para resolução do problema foi considerada a versão capacitada do problema que leva em consideração a capacidades dos CDs e *hubs*.

Em seguida, foi feita a adaptação dos modelos matemáticos às características da empresa. Após a definição das variantes do PLF que retratam grande parte das características da empresa, fez-se adaptações aos modelos clássicos de modo a torná-los aderentes às hipóteses e características do problema real da empresa estudada.

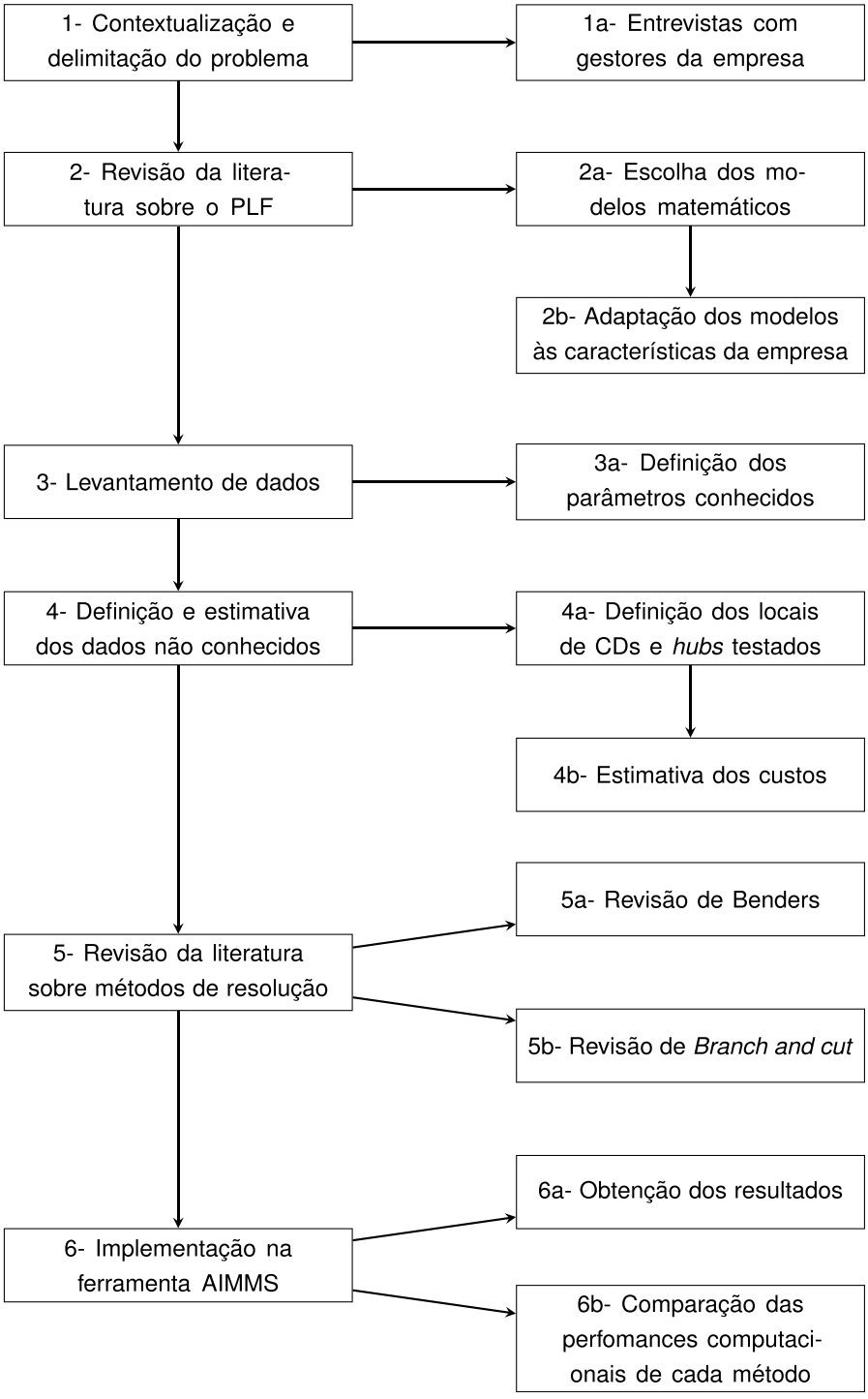


Figura 15 – Fluxograma da metodologia realizada

Fonte: O próprio autor.

A terceira etapa do trabalho foi o levantamento de dados. Nesta etapa foram definidas as informações importantes para modelagem e resolução do problema e os dados foram recebidos dos gestores da empresa. Durante esse levantamento de dados, obteve-se a localização atual dos seus CDs e lojas, a capacidade de distribuição dos CDs atuais, a previsão de demanda anual de cada loja, os custos de transporte da empresa a partir dos CDs, os custos fixos e variáveis dos CDs atuais, entre outros. Essa etapa foi importante para que fosse possível obter os valores de alguns dos principais parâmetros utilizados na resolução do problema como demanda e capacidade.

A quarta etapa do trabalho foi a de assumir valores para parâmetros que aparecem nos modelos ou de estimar os parâmetros em que a empresa possuia dados, mas que precisaram ser trabalhados para chegar a números mais precisos e que pudessem ser utilizados na resolução dos modelos matemáticos propostos. Estes parâmetros são de custos fixos e variáveis de operação das facilidades, custos de transporte, entre outros. Na seção 4.3 será apresentado como os valores de cada um dos parâmetros presentes no modelo foram definidos ou estimados. Nesta etapa do trabalho também foi feita a definição dos locais dos CDs e *hubs* que seriam testados como candidatos no modelo. Essa definição foi feita considerando as regiões com maior demanda de produtos e, também, regiões com piores desempenhos de atendimento em função da dificuldade de contratação de veículos.

Também nesta etapa foi feita a estimativa dos custos logísticos envolvidos na distribuição a partir dos CDs e *hubs* definidos para teste. Os custos foram divididos em custos de implantação, custos fixos e variáveis de operação das facilidades e custos de transporte de cada CD testado para cada loja e também dos CDs para *hubs* e destes para as lojas.

A quinta etapa do trabalho foi a revisão bibliográfica dos métodos de resolução, encontrados na literatura, para a resolução do PLF. Com base nesta revisão bibliográfica e, também, nos métodos de resolução disponíveis na ferramenta *AIMMS*, definiu-se os métodos que seriam testados para a resolução dos modelos matemáticos adaptados às características da empresa. Após a definição dos métodos de resolução do problema, foi feita uma revisão da literatura destes métodos para melhor compreensão do seu funcionamento e leitura dos resultados.

A sexta e última etapa do trabalho foi a implementação dos modelos matemáticos na ferramenta *AIMMS* com a utilização dos dados reais da empresa. O modelo ma-

temático representando cada um dos cenários escolhidos para teste foi resolvido com os três métodos de resolução selecionados para o estudo: *Branch-and-Cut*, Decomposição de Benders e *Dynamic Search*. Os resultados obtidos nessa etapa serão apresentados no capítulo 6.

4- Problema a ser estudado

4.1- Descrição da empresa

A proposta de trabalho tem como foco o estudo de caso de uma empresa do varejo brasileira. A empresa tem mais de 1.000 lojas, localizadas em todas as regiões do Brasil e comercializa produtos diversos como alimentícios, vestuários, eletrônicos, entre outros. A empresa teve sua primeira loja inaugurada no sudeste e a partir disso, teve sua expansão nos primeiros anos nesta região, onde possui agora 3 CDs. Entretanto, observa-se nos últimos anos uma tendência de expansão para as outras regiões do Brasil. De acordo com o plano de expansão da empresa, a maior parte das lojas inauguradas nos próximos quatro anos deve seguir essa mesma tendência. Assim, a distância média percorrida para a distribuição a partir de seus CDs atuais para as suas lojas é atualmente de 554,1 km e a tendência é um aumento dessa distância para os próximos anos, fator que tem uma relação direta com o nível de serviço da empresa em função das grandes distâncias entre CDs e lojas.

A figura 16 apresentada abaixo mostra a localização das lojas da empresa abertas durante o ínicio da etapa de levantamentos de dados. As lojas estão representadas pelos símbolos em azul, a localização dos CDs atuais é indicada pelos símbolos em roxo. Para a plotagem da figura 16 foi utilizada a ferramenta *Google Maps*®.

4.2- Definição do problema

Dentre os principais indicadores de nível de serviço desejados pela empresa destacam-se o cumprimento do prazo de entrega acordado com cada loja, o aumento da quantidade de entregas mensais para cada loja e o aumento da disponibilidade de veículos, sendo importante, então, a redução dos tempos de viagem. Além desses indicadores de melhoria de desempenho, é importante manter os custos totais da rede



Figura 16 – Mapa com a localização atual de CDs e lojas da empresa

Fonte: O próprio autor.

logística no menor valor possível. Espera-se, assim, com o estudo confirmar uma expectativa da empresa de que aumentando-se o número de facilidades na rede, tornando-as mais próximas aos clientes, seja possível além de melhorar os custos, colaborar com a melhoria dos indicadores de nível de serviços apresentados. A empresa possui quatro CDs que foram inaugurados há anos, sendo três há mais de 15 anos e apenas 1 há menos de 10 anos. Esses CDs foram instalados de acordo com a localização das lojas abertas na época e, por isso, o custo de frete para um número cada vez maior de lojas é muito alto em função da grande distância.

A empresa então criou um setor responsável pelo estudo e definição de uma nova rede de transporte. Este estudo leva em consideração a análise do seu plano de expansão com a verificação da quantidade e localização ideal de novos CDs e a verificação da viabilidade de *hubs*, bases intermediárias de distribuição entre os CDs e as lojas e que podem funcionar como pequenos CDs com a existência de estoques. Os *hubs* tem o objetivo de reduzir as distâncias entre CDs e lojas para os casos de lojas mais distantes e possibilitar a redução de custos de frete. A empresa já possui alguns *hubs* com a função

de consolidação de carga, porém, sua abertura não proporcionou economias no custo logístico total. Esses *hubs* estão sendo abertos em parceria com uma transportadora e espera-se que também funcionem como pequenos CDs dos produtos de maior valor agregado para aproximação dos produtos aos clientes. O trabalho a ser desenvolvido servirá, então, como base para colaborar com a decisão da localização das facilidades citadas.

4.3- Levantamento de dados

Nesta seção serão apresentados o detalhamento do levantamento de dados e a forma como foram estimados os parâmetros do problema: capacidade de CDs e *hubs*, capacidade de transbordo dos *hubs*, distâncias entre cada par origem e destino, taxa de desconto obtida pela passagem nos *hubs*, custos de transporte e custos de abertura e de operação de CDs.

Para a construção dos cenários em que não houve escolha do tamanho dos CDs, considerou-se que todos os CDs testados tinham o tamanho de 60.000m^2 e que todos os *hubs* tinham 4.000m^2. Esse foi o tamanho considerado para os CDs porque a empresa considera que o tamanho ideal limite deve ser de 60.000m^2, pois para galpões maiores, começa a haver uma da perda de produtividade pelo grande deslocamento dos funcionários dentro dos CDs, propiciando o aumento das perdas com a maior movimentação das mercadorias. O tamanho dos *hubs* foi definido de acordo com a área aproximada que a empresa destina atualmente para seus produtos de tecnologia. Para os modelos matemáticos com definição de tamanho de galpão foram utilizados três possíveis tamanhos para CDs, 20.000m^2, 40.000m^2 e 60.000m^2 e não foram consideradas possíveis variações de tamanho para os *hubs*, mantendo os 4.000m^2.

A estimativa da capacidade dos novos CDs propostos foi feita com base nos dados dos CDs atuais. Foi feito o levantamento da quantidade máxima de remessas que cada CD tem capacidade de distribuir por dia e esse dado foi dividido pelo tamanho do CD. Assim, a capacidade média entre os CDs atuais da empresa é de 2.500 remessas por m^2 de galpão e esse dado de capacidade foi utilizado para os demais CDs testados no modelo. Para a capacidade dos *hubs*, foi considerado 2.800 remessas por m^2 de

galpão, também de acordo com os dados médios atuais para os produtos de tecnologia. Como os galpões da empresa são alugados, exite uma maior flexibilidade na definição do galpão alugado e, por isso, a empresa pode buscar galpões o mais próximos possível das dimensões de tamanho e capacidade consideradas para resolução do problema.

Foi calculada, também, uma capacidade de transbordo para os *hubs*. Para isso, considerou-se galpões para *hubs* com quatro docas, tempo médio de descarga de cada carreta com carregamento nos veículos menores em 4 horas com 5 auxiliares de carga e descarga. Para o descarregamento de uma carreta são necessárias sempre duas docas e em cada turno de trabalho consegue-se descarregar 2 carretas. Assim, foram considerados dois turnos de trabalho de 8 horas para cada *hub*, como é possível descarregar 2 carretas por turno e cada carreta comporta em média 4.000 remessas da empresa, a capacidade de transbordo considerado para *hub* foi de 32.000 remessas por dia.

O cálculo das distâncias entre cada par origem e destino, foi feito após a definição dos locais dos CDs e *hubs* que seriam testados no modelo. Para isso, dividiu-se as lojas em regiões de atendimento, verificou-se as regiões com maior demanda e as treze regiões com maior demanda foram utilizadas como possíveis localizações para os CDs e os *hubs*. Além disso, foram identificadas outras dez localizações com concentração de demanda que foram utilizadas como possíveis localizações para os *hubs*. Por meio de entrevistas com gestores da empresa do setor de Logística e Transporte, que conheciam cada região, buscou-se dentro dessas regiões, cidades com maior infra-estrutura em rodovias que facilitassem o escoamento das mercadorias e com disponibilidade de galpões com infra-estrutura para serem utilizados como CDs, com preferência para cidades que possuíssem um polo econômico com a localização de CDs de outras empresas. Para a localização dos *hubs* também optou-se por cidades com melhor infra-estrutura. A localização atual dos CDs da empresa, em regiões com grande quantidade de lojas, também foram consideradas nos testes para verificar se um ou mais CDs da empresa deveriam ter a sua localização mantida.

Outro dado importante levantado foi a taxa de desconto obtida para cada par origem e destino pela passagem nos *hubs*. Para determinação desses dados foi feita uma estimativa com o auxílio da equipe de precificação da transportadora parceira da empresa. Para essa estimativa foram levados em consideração a dificuldade na entrega direta dos CDs para as lojas à medida que a distância percorrida fica muito grande. Além disso, foi

considerada uma maior taxa de desconto para rotas curtas entre *hubs* e lojas, com uma penalização para distâncias muito longas, já que o objetivo dos *hubs* é o encurtamento das distâncias de atendimento e, com isso, costumam não ter veículos adequados para percorrer longas distâncias. Os valores para esses descontos foram estimados com base na experiência da equipe de precificação, assim como, de dados de tabelas já existentes. Porém, entende-se que não existe um valor exato para estes parâmetros de taxa de desconto e que depende da margem de lucro esperada e das perspectivas futuras da operação. Nos cenários são utilizados diferentes valores, variando de acordo com a origem e o destino, para os parâmetros da taxa de desconto. A média de todos os valores utilizados para a taxa de desconto entre CDs e *hubs* e entre *hubs* e clientes foram, 0,82 e 0,98, respectivamente.

Foi feita uma estimativa dos custos de transporte de cada CD para cada loja e também dos CDs para *hubs* e destes para as lojas, de acordo com dados de custos reais de viagens recebidos dos gestores da área de Logística da empresa. A empresa trabalha no modelo de carga lotação, conceito utilizado quando existe a contratação do baú do caminhão. Ela possui uma tabela de frete de cada origem para cada destino e um valor distinto para cada tipo de veículo de acordo com a sua capacidade em m^3 e toneladas. Assim, o valor pago pela empresa por viagem é fixo e independe da quantidade de produtos transportados, então, a forma de reduzir custos é pela escolha correta do tipo de veículo por viagem e da maior ocupação do baú. Como o trabalho tem foco no PLF e não no roteamento de veículos, já que a definição das rotas é dinâmica e fazem parte do planejamento operacional da empresa e não do plano estratégico, buscou-se uma forma de desconsiderar a escolha das rotas por viagem e de aproximar os custos de transporte por quantidade distribuída. Ballou (2006) faz uma estimativa de custo de transporte para cada produto distribuído com uma regressão linear simples em função da distância. Assim, utilizou-se uma regressão linear simples para estimar os custos de transporte da empresa em função da distância entre a origem e o destino.

Foi feito o levantamento de viagens no período de 45 dias e para cada viagem foram registrados em uma tabela: os custo de transporte; a quantidade de unidades transportada; o percentual de ocupação do veículo e a distância percorrida. A distância foi utilizada como variável independente na regressão e como variável dependente foi utilizado o custo multiplicado pelo percentual de ocupação do veículo dividido pela quantidade distribuída, conforme a expressão (105). Essa multiplicação do custo pela ocupação

foi feita como forma de reduzir as diferenças entre o custo e a quantidade distribuída, visto que, na prática, a empresa paga o mesmo custo de transporte independentemente da ocupação do veículo.

$$(C_{ik} * \%Oc.)/X \tag{105}$$

Em que:

C_{ik} = Custo de transporte de *i* para *k*

%Oc. = % Ocupação dos veículos

X: Quantidade distribuída

A regressão foi feita por intervalos para o valor da distância, tendo em vista que os custos de transporte pagos pela empresa não aumentam de forma linear à distância. Assim, com os intervalos de distância, foram obtidas equações mais próximas dos custos pagos pela empresa, com um maior coeficiente de determinação. Em todas as regressões que foram feitas por intervalo de distância obteve-se o coeficiente de determinação entre 0,6 e 0,75. As equações por intervalos de distância que foram utilizados para a resolução do problema são apresentadas na tabela 2, em que R_{ik} representa a distância entre os pontos i e k.

Para a classificação dos outros custos da empresa em estudo neste trabalho, foram obtidos os custos realizados pelos CDs existentes, que foram separados em custos de abertura de CDs, custos fixos e variáveis. Os custos fixos envolvidos na abertura dos CDs, são um valor único investido em sua abertura. Estes custos foram divididos em quatro categorias, de acordo com dados da empresa: (i) custos com compra de máquinas e equipamentos, em que os principais custos dessa categoria são estrutura de armazenagem, equipamentos de movimentação como paleteiras e empilhadeiras, esteiras, *pallets* de madeira, plataformas niveladoras para as docas, entre outros; (ii) custos com equipamentos de segurança, em que destacam-se câmeras, cancelas, alarmes, entre outros; (iii) custos com obras gerais e instalação da rede elétrica; (iv) custos com instalação de sistemas e de rede de informática. Para os custos fixos foram considerados: custos com aluguel, custos com impostos, seguros e custos com contratação de serviços externos, todos eles proporcionais à area (em m^2) de galpão. Para os custos variáveis foram considerados: custos de manuseio, custos com consumo de materiais (custos com suprimentos), energia e custos com manutenção de equipamentos. Os custos administrativos com funcionários também foram considerados variáveis, pois

Tabela 2 – Equação do custo de transporte por intervalo de distância (km)

Intervalo de distância (km)	Equação do custo de transporte
0 a 20	0,026603*R_{ik}
21 a 40	0,011957*R_{ik}
41 a 70	0,005509*R_{ik}
71 a 100	0,005055*R_{ik}
101 a 150	0.003884*R_{ik}
151 a 200	0.0036*R_{ik}
201 a 320	0.003022*R_{ik}
320 a 480	0.001841*R_{ik}
481 a 650	0.001539*R_{ik}
651 a 800	0.001137*R_{ik}
801 a 1200	0.001203*R_{ik}
1201 a 1500	0.00102*R_{ik}
1501 a 2000	0.001*R_{ik}
2001 a 3000	0.001211*R_{ik}
3001 a 5000	0.000747*R_{ik}
5001 a 6000	0.000424*R_{ik}

Fonte: O próprio autor.

essa premissa é adotada pela empresa. Como a empresa em estudo não possuia dados históricos de custos de manutenção de estoques e depreciação, esses custos foram desconsiderados para os cálculos.

Para os custos de instalação dos novos CDs possíveis, foram utilizados os valores médios dos custos de abertura dos CDs existentes. Estes custos também foram considerados diretamente proporcionais à área do galpão. Embora esses custos, em geral, sejam apresentados na literatura com uma redução à medida que o tamanho do galpão aumenta, os dados foram considerados lineares para todas as dimensões dos galpões, conforme consideração da empresa. Para os *hubs*, os custos foram estimados de forma diferente quando eles funcionam apenas como locais de reconsolidação de carga, em que foram denominados Pontos de Transbordo (PTs) nas tabelas para diferenciação de quando possuem estoque dos produtos de tecnologia, em que manteve-se a denominação de *hubs*. Para os CDs atuais da empresa esses custos de instalação foram desconsiderados. A tabela 3 apresenta os custos de abertura considerados para CDs, PTs e para os *hubs*.

Para esses custos não considerou-se uma variação por cidade.

Neste parágrafo apresentam-se as variações feitas nos custos de instalação para PTs e *hubs* em relação aos utilizados para os CDs. As variações foram feitas em função das diferentes características de cada tipo de facilidade. Nos *hubs* como locais de reconsolidação de carga, PTs, considerou-se uma redução de 70% nos custos por m^2 com máquinas e equipamentos e manteve-se os demais custos e nos *hubs* com estoque de produtos de tecnologia, considerou-se um aumento de 50% nos custos por m^2 com equipamentos de segurança e uma redução de 55% nos custos com máquinas e equipamentos. Estes percentuais de redução foram definidos pelos gestores da empresa da área de Logística e foram feitos com a estimativa de quais custos dentre os que compõem os custos totais precisariam ser aumentados ou poderiam ser reduzidos ou eliminados.

Tabela 3 – Custos fixos estimados (R$/$m^2$) de abertura para CDs e *hubs*

Custo fixo	CDs	*Hubs*	PTs
Equipamentos de segurança (R$/$m^2$)	19	28,5	19
Máquinas e equipamentos (R$/$m^2$)	167,8	75,5	50,3
Rede elétrica e obras (R$/$m^2$)	39,2	39,2	39,2
Rede de informática (R$/$m^2$)	59	59	59

Fonte: O próprio autor.

Para os dados de contratação de serviços externos também foram considerados os valores médios dos CDs atuais para os demais CDs e *hubs*. Estes custos também foram considerados como proporcionais ao m^2 de galpão. Dessa forma, desconsiderou-se algumas variações como a diferente necessidade de equipes com segurança em diferentes cidades.

Os custos com seguros e impostos também foram considerados como proporcionais à área de galpão e foram estimados para todos os CDs e *hubs* de acordo com a média dos CDs existentes.

Para os custos de aluguel, foi feita uma pesquisa na internet em sites de anúncios dos valores de aluguel de galpões nas cidades testadas, que estivessem disponíveis para locação no momento da pesquisa e que possuíssem as principais características e dimensões exigidas pela empresa. Dentre essas características destacam-se galpões em condomínios logísticos com segurança 24 horas e com uma quantidade de docas

compatível com o tamanho do galpão. Para definir o custo de locação em cada CD e *hub* testado, utilizou-se a média dos custos encontrados em cada cidade na pesquisa realizada. Os custos de aluguel também são proporcionais à área (m^2) de galpão. Como o rigor da empresa em relação às questões de segurança dos galpões é maior quando existe armazenagem, fez-se uma pesquisa separada para preço de aluguel de galpões para os *hubs*, quando eles funcionam apenas como locais de reconsolidação de carga e quando possuem estoque. A tabela 4 apresenta os custos fixos mensais para cada CD e *hub* testados no modelo. Os custos de serviços externos foram considerados 3,42 R$/$m^2$ e os custos de seguros e impostos, 0,364 R$/$m^2$, para todos os CDs, *hubs* e PTs e estão no total corresponde a cada um deles nas colunas 4 e 5 da tabela.

Para os custos variáveis de manutenção e suprimentos, a estimativa para as novas localizações de CDs e *hubs* foi feita utilizando a média desses custos para os CDs existentes. Assim, utilizou-se para todas as localidades candidatas o custo de R$ 0.045 para suprimentos e R$ 0.015 para manutenção, por unidade distribuída. Para os custos de energia, levantou-se a média mensal de gastos por CD existente. Fez-se uma pesquisa das tarifas em R$/kWh no portal da ANEEL (Agência Nacional de Energia Elétrica), das cidades testadas como localizações possíveis para CDs e *hubs* no modelo e para as cidades em que as tarifas não foram encontradas, utilizou-se a tarifa da capital do mesmo estado. A variação percentual da tarifa de cada cidade em relação à tarifa média das cidades dos CDs atuais foi aplicada no custo médio de energia destes CDs para encontrar a estimativa do custo de CD ou *hub* testado.

Para os custos de manuseio, calculou-se a média mensal para os CDs atuais da empresa da razão entre os gastos com salários, somados aos benefícios para os empregados, e a quantidade de unidades distribuídas. Assim, foram obtidos os custos de manuseio dos CDs já existentes. Foi feita uma pesquisa da variação percentual entre os salários das cidades testadas para CDs e *hubs* em relação à média dos salários das cidades dos CDs atuais da empresa. Foram considerados os salários dos três principais cargos que existem nos CDs, auxiliar de logística, conferentes e operadores de empilhadeira. Para encontrar o custo de manuseio por CD testado, foi aplicada a média da variação percentual entre os salários para esses três cargos por cidade nos custos médio de manuseio dos CDs atuais. Os custos com manuseio foram considerados 20% menores para os produtos de tecnologia, em função de uma produtividade maior. Na tabela 5 apresentam-se os dados utilizados de custos fixos e variáveis para cada CD e

Tabela 4 – Custos fixos (R$/$m^2$) mensais considerados para os CDs e *hubs*

Cidade	Aluguel CDs/*hubs*	Aluguel PTs	Total CDs/*hubs*	Total PTs
1- Recife	17	15	20,78	18,78
2- Uberlândia	17	17	20,78	20,78
3- Goiânia	16	13	19,78	16,78
4- Itapevi	23	20	26,78	23,78
5- Betim	19	18	22,78	21,78
6- Salvador	19	16	22,78	19,78
7- Curitiba	15	13	18,78	16,78
8- Palhoça	17	15	20,78	18,78
9- Brasília	22	19	25,78	22,78
10- Belém	18	15	21,78	18,78
11- Fortaleza	16	13	19,78	16,78
12- Nova Iguaçu	20	18	23,78	21,78
13- Ribeirão Preto	17	15	20,78	18,78
14- Londrina	15	14	18,78	17,78
15- São Luis	16	15	19,78	17,78
16- Vitória	17	16	20,78	19,78
17- Vitória da Conquista	18	18	22,78	21,78
18- Porto Alegre	19	18	21,78	21,78
19- Teixeira de Freitas	14	13	17,78	16,78
20- Cuiabá	13	12	16,78	15,78
21- Teresina	14	13	17,78	16,78
22- Campo Grande	15	14	18,78	17,78
23- Juazeiro do Norte	13	12	16,78	15,78

Fonte: O próprio autor.

hub testado no modelo.

Tabela 5 – Custos variáveis (R$/quantidade distribuída) utilizados para os CDs e *hubs* testados

Cidade	Energia	Manuseio CDs	Manuseio *hubs*	Manuseio PTs
Recife	0,062	0,781	0,624	0,046
Uberlândia	0,064	0,884	0,707	0,048
Goiânia	0,054	0,893	0,715	0,047
Itapevi	0,054	1,062	0,849	0,059
Betim	0,064	0,911	0,729	0,047
Salvador	0,057	0,884	0,707	0,044
Curitiba	0,057	0,964	0,771	0,056
Palhoça	0,059	1,062	0,849	0,053
Brasília	0,058	0,858	0,686	0,046
Belém	0,077	0,849	0,679	0,046
Fortaleza	0,061	0,831	0,665	0,047
Nova Iguaçu	0,068	0,973	0,778	0,051
Ribeirão Preto	0,054	1,062	0,849	0,059
Londrina	0,057	1	0,8	0,057
São Luis	0,072	0,849	0,679	0,044
o Vitória	0,063	0,911	0,729	0,046
Vitória da Conquista	0,057	0,858	0,686	0,045
Porto Alegre	0,050	0,964	0,771	0,052
Teixeira de Freitas	0,057	0,858	0,686	0,045
Cuiabá	0,064	0,937	0,75	0,048
Teresina	0,071	0,778	0,622	0,044
Campo Grande	0,063	0,929	0,743	0,047
Juazeiro do Norte	0,061	0,831	0,665	0,047

Fonte: O próprio autor.

4.4- Limitação do estudo

Em função da complexidade da distribuição da empresa estudada, foram feitas simplificações para o PLF. A primeira simplificação foi em relação à demanda dos clientes que é variável e de acordo com a quantidade vendida dos produtos, assim, assumimos que ela é determinística, em vez de estocástica. Como a proposta do problema não visa

estudar um modelo que leve em consideração a variação ao longo do tempo, para a resolução dos modelos matemáticos foi considerado que a demanda é estástica em vez de dinâmica.

Outra limitação do estudo refere-se à quantidade de critérios considerados na escolha da localização ótima dos CDs e *hubs*. Neste trabalho alguns critérios não estão sendo considerados como incentivos fiscais das cidades, aumento da margem de lucro devido ao melhor gerenciamento o estoque, custos de manutenção de estoques e depreciação..

Considera-se, também, uma limitação a forma como os custos da empresa foram estimados para resolução do problema. A maior parte dos custos foi estimado considerando a média entre os CDs atuais e para apenas parte dos custos foi considerada a variação de valores entre as cidades consideradas para CDs e *hubs*. Além disso, custos administrativos foram considerados como variáveis e os custos de abertura foram considerados lineares com o tamanho de galpão. Essas considerações foram feitas por ser a forma como os dados foram recebidos da empresa, portanto, um estudo mais detalhado seria necessário para a obtenção de uma estimaiva mais precisa desses custos.

5- Modelos matemáticos propostos

Para melhor representar as características da empresa e para a construção de diferentes cenários que servissem de auxílio à tomada de decisão da localização das suas instalações foram propostos três modelos de Programação Inteira. O primeiro modelo apresentado é monoproduto e permite alocação múltipla. A seguir, este modelo é reformulado para incluir a decisão de escolha do tamanho dos CDs. E, por fim, apresenta-se uma formulação multiproduto com decisões de escolha de tamanho dos CDs.

A seguir serão apresentados os conjuntos, parâmetros e variáveis de decisão para cada modelo proposto, assim como, a explicação da função objetivo e de cada restrição.

5.1- Monoproduto com alocação múltipla

Conjuntos:

I = {1,. . . , m} é o conjunto de potenciais localizações para abertura de CDs ;
J = {1,. . . , n} é o conjunto de potenciais localizações para abertura de *hubs*;
K = {1,. . . , x} é o conjunto de clientes.

Parâmetros:

F_i: Custo fixo do CD i;
G_j: Custo fixo do *hub* j;
C_{ik}: Custo de transporte do CD i para o cliente k;
C_{ij}: Custo de transporte do CD i para o *hub* j;
C_{jk}: Custo de transporte do *hub* j para o cliente k;
R_{ik}: Distância entre o CD i e o cliente k;
R_{ij}: Distância entre o CD i e o *hub* j;
R_{jk}: Distância entre o *hub* j e o cliente k;

H_j: Capacidade de transbordo do *hub* j;

B_i: Capacidade de distribuição do CD i;

a_{ij}: Fator de redução do custo de transporte do CD i para o *hub* j;

a_{jk}: Fator de redução do custo de transporte do *hub* j para o cliente k;

D_k: Demanda do cliente k;

$T1_i$: Custo variável de operação do CD i;

$T2_j$: Custo variável de operação de transbordo do *hub* j;

M: Distância máxima entre *hubs* e clientes;

W_k: Distância máxima entre os CDs e o cliente k.

Variáveis de decisão:

X_{ik}: Quantidade de produto enviada do CD i para o cliente k tal que $R_{ik} < W_k$;

S_{ijk}: Quantidade de produto do CD i para o cliente k através do *hub* j tal que $R_{jk} < M$;

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{se o CD } i \text{ é aberto;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$Z_j = \begin{cases} 1, & \text{se o } \textit{hub}\ j \text{ é aberto;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$z = \sum_i F_i Y_i + \sum_j G_j Z_j + \sum_i \sum_k T1_i X_{ik} + \sum_i \sum_j \sum_k (T1_i + T2_j) S_{ijk} + \sum_i \sum_k C_{ik} X_{ik} + \sum_i \sum_j \sum_k (a_{1ij} C_{ij} + a_{2jk} C_{jk}) S_{ijk} \tag{106}$$

Sujeito a:

$$\sum_i \sum_k S_{ijk} \leq H_j Z_j, \forall j \tag{107}$$

$$\sum_k X_{ik} + \sum_j \sum_k S_{ijk} \leq B_i Y_i, \forall i \tag{108}$$

$$\sum_i X_{ik} + \sum_i \sum_j S_{ijk} = D_k, \forall k, \tag{109}$$

$$Y_i + Z_j \leq 1, \forall i, j \mid i = j \tag{110}$$

$$X_{ik}, S_{ijk} \geq 0, \forall i, j, k \tag{111}$$

$$Y_i,\ Z_j \ \in \ \{0,1\}, \forall i, j \tag{112}$$

No modelo matemático expresso por (106)-(112), a função objetivo (106) é de minimização dos custos totais em que a primeira e segunda parcelas representam os custos fixos de CDs e *hubs*, respectivamente. A terceira parcela representa os custos variáveis de operação de CDs quando a entrega é direta e a quarta parcela, os custos variáveis somados de operação de CDs e *hubs* quando a entrega é indireta com passagem pelos *hubs*. A quinta parcela representa os custos variáveis de transporte com entrega direta e a última parcela, os custos variáveis de transporte com entrega indireta. A restrição (107) garante que a passagem por um *hub* só aconteça se ele for aberto e que sua capacidade de transbordo não seja excedida. A restrição (108) garante que a capacidade do CD i não seja ultrapassada, a restrição (109) que a demanda do cliente k seja satisfeita e a restrição (110), que um CD e um *hub* não sejam abertos em um mesmo local. As restrições (111) e (112) declaram as variáveis de decisão.

De acordo com a classificação para o PLF com níveis hierárquicos apresentado na seção 1.2, este é um modelo de fluxo múltiplo podendo haver distribuição direta entre CDs e clientes ou indireta através dos *hubs* que fazem transbordo, a hierarquia é não-aninhada, já que os *hubs* fornecem um serviço diferente de transbordo, os sistemas são coerentes, pois um nível hierárquico abastece um nível superior e seu objetivo está na categoria de custos fixos. Já de acordo com a classificação apresentada na seção 1.4 do PLH, o domínio da solução é discreto com um subconjunto discreto de nós candidatos a tornarem-se *hubs*, o número de *hubs* a alocar é endógeno, sendo parte da solução, o critérios de otimização é mini-soma tendo como objetivo a minimização do custo total, existem múltiplos *hubs*, capacitados, com custos fixos de alocação dos *hubs*, o custo de conexão é variável e os tipos de rota possíveis são “sem parada” e com parada em um único *hub*. Os outros dois modelos que serão apresentados nas seções 5.2 e 5.3 também seguem a mesma classificação.

5.2- Monoproduto com alocação múltipla e escolha do tamanho do CD

Conjuntos:

I = {1,. . . , m} é o conjunto de potenciais localizações para abertura de CDs ;
J = {1,. . . , n} é o conjunto de potenciais localizações para abertura de *hubs*;
K = {1,. . . , x} é o conjunto de clientes;
L = {1,. . . , z} é o conjunto de potenciais tamanhos para os CDs.

Parâmetros:

F_{il}: Custo fixo do CD i de tamanho l;
G_j: Custo fixo do *hub* j;
C_{ik}: Custo de transporte do CD i para o cliente k;
C_{ij}: Custo de transporte do CD i para o *hub* j;
C_{jk}: Custo de transporte do *hub* i para o cliente k;
R_{ik}: Distância entre o CD i e o cliente k;
R_{ij}: Distância entre o CD i e o *hub* j;
R_{jk}: Distância entre o *hub* j e o cliente k;
H_j: Capacidade de transbordo do *hub* j;
B_{il}: Capacidade de distribuição do CD i de tamanho l;
a_{ij}: Fator de redução do custo de transporte do CD i para o *hub* j;
a_{jk}: Fator de redução do custo de transporte do *hub* j para o cliente k;
D_k: Demanda do cliente k;
$T1_i$: Custo variável de operação do CD i;
$T2_j$: Custo variável de operação de transbordo do *hub* j;
M: Distância máxima entre *hubs* e clientes;
W_k: Distância máxima entre os CDs e o cliente k.

Variáveis de decisão:

X_{ilk}: Quantidade de produto do CD i de tamanho l para o cliente k tal que $R_{ik} < W_k$;

S_{iljk}: Quantidade de produto do CD i de tamanho l para o cliente k através do *hub* j tal que $R_{jk} < M$;

$$Y_{il} = \begin{cases} 1, & \text{se o CD } i \text{ de tamanho } l \text{ é aberto;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$Z_j = \begin{cases} 1, & \text{se o } \textit{hub}\ j \text{ é aberto;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$z = \sum_i \sum_l F_{il} Y_{il} + \sum_j G_j Z_j + \sum_i \sum_l \sum_k T1_i X_{ilk} + \sum_i \sum_l \sum_j \sum_k (T1_i + T2_j) S_{iljk} + \sum_i \sum_l \sum_k C_{ik} X_{ilk} + \sum_i \sum_l \sum_j \sum_k (a_{1ij} C_{ij} + a_{2jk} C_{jk}) S_{iljk} \tag{113}$$

Sujeito a:

$$\sum_i \sum_l \sum_k S_{iljk} \leq H_j Z_j, \forall j \tag{114}$$

$$\sum_k X_{ilk} + \sum_j \sum_k S_{iljk} \leq B_{il} Y_{il}, \forall i, \forall l \tag{115}$$

$$\sum_i \sum_l X_{ilk} + \sum_i \sum_l \sum_j S_{iljk} = D_k, \forall k, \tag{116}$$

$$\sum_l Y_{il} \leq 1, \forall i \tag{117}$$

$$Y_{il} + Z_j \leq 1, \forall i, \forall j, \forall l | i = j \tag{118}$$

$$X_{ilk}, S_{iljk} \geq 0, \forall i, \forall l, \forall j, \forall k \tag{119}$$

$$Y_{il}, Z_j \ \varepsilon \ \{0, 1\}, \forall i, \forall l, \forall j \tag{120}$$

No modelo matemático expresso por (113)-(120), a função objetivo (113) também é de minimização dos custos totais, em que os termos são os mesmo da função objetivo apresentada na seção 5.1. A restrição (114) garante que a passagem por um *hub* só aconteça se ele for aberto e que sua capacidade de transbordo não seja excedida. A restrição (115) garante que a capacidade do CD i de tamanho l não seja ultrapassada, a restrição (116) que a demanda do cliente k seja satisfeita. A restrição (117) garante que

um CD i, caso seja aberto, tenha apenas um tamanho e a restrição (118), que um CD e um *hub* não sejam abertos em um mesmo local. As restrições (119) e (120) declaram as viaráveis de decisão.

5.3- Multiproduto com alocação múltipla e escolha do tamanho de CDs

Conjuntos:

I = {1,. . . , m} é o conjunto de potenciais localizações para abertura de CDs ;
J ={1,. . . , n} é o conjunto de potenciais localizações para abertura de *hubs*;
K = {1,. . . , x} é o conjunto de clientes;
L = {1,. . . , z} é o conjunto de potenciais tamanhos para os CDs;
P = {1,. . . , v} é o conjunto de produtos.

Parâmetros:

F_{il}: Custo fixo do CD i de tamanho l;
G_j: Custo fixo do *hub* j;
C_{ik}: Custo de transporte do CD i para o cliente k;
C_{ij}: Custo de transporte do CD i para o *hub* j;
C_{jk}: Custo de transporte do *hub* j para o cliente k;
R_{ik}: Distância entre o CD i e o cliente k;
R_{ij}: Distância entre o CD i e o *hub* j;
R_{jk}: Distância entre o *hub* j e o cliente k;
B_{ilp}: Capacidade de distribuição do CD i de tamanho l pelo produto p;
H_j: Capacidade de transbordo do *hub* j;
P_{jp}: Capacidade de distribuição do *hub* j do produto p;
a_{ij}: Fator de redução do custo de transporte do CD i para o *hub* j;
a_{jk}: Fator de redução do custo de transporte do *hub* j para o cliente k;
D_{kp}: Demanda do cliente k pelo produto p;

$T1_{ip}$: Custo variável de operação do CD i do produto p;

$T2_j$: Custo variável de operação de transbordo do *hub* j;

$T3_j$: Custo variável de operação do *hub* j;

W_{kp}: Distância máxima entre os CDs e o cliente k de acordo com o produto p.

Variáveis de decisão:

X_{ilkp}: Quantidade de produto p do CD i de tamanho l para o cliente k tal que $R_{ik} < W_{kp}$;

S_{iljkp}: Quantidade de produto p do CD i de tamanho l para o cliente k através do *hub* j tal que $R_{jk} < W_{kp}$;

Q_{jkp}: Quantidade de produto p do hub j para o cliente k tal que $R_{jk} < W_{kp}$;

$$Y_{il} = \begin{cases} 1, & \text{se o CD } i \text{ de tamanho } l \text{ é aberto;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$Z_j = \begin{cases} 1, & \text{se o } \textit{hub}\ j \text{ é aberto;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z = \sum_{il} F_{il}Y_{il} + \sum_{j} G_j Z_j + \sum_{i}\sum_{l}\sum_{k}\sum_{p} T1_{ip}X_{ilkp} + \sum_{j}\sum_{k}\sum_{p} T3_j Q_{jkp} + \\ \sum_{i}\sum_{l}\sum_{j}\sum_{k}\sum_{p}(T1_{ip} + T2_j)S_{iljkp} + \sum_{i}\sum_{l}\sum_{k}\sum_{p} C_{ik}X_{ilkp} \\ + \sum_{i}\sum_{l}\sum_{j}\sum_{k}\sum_{p}(a_{1ij}C_{ij} + a_{2jk}C_{jk})S_{iljkp} + \sum_{j}\sum_{k}\sum_{p} C_{jk}Q_{jkp} \end{aligned} \tag{121}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i}\sum_{l}\sum_{k}\sum_{p} S_{iljkp} \leq H_j Z_j, \forall j \tag{122}$$

$$\sum_{k} X_{ilkp} + \sum_{j}\sum_{k} S_{iljkp} \leq B_{ilp}Y_{il}, \forall i, \forall l, \forall p \tag{123}$$

$$\sum_{k} Q_{jkp} \leq P_{jp}Z_j, \forall j \tag{124}$$

$$\sum_{i}\sum_{l} X_{ilkp} + \sum_{i}\sum_{l}\sum_{j} S_{iljkp} + \sum_{j} Q_{jkp} = D_{kp}, \forall k, \forall p \quad (125)$$

$$\sum_{l} Y_{il} \leq 1, \forall i \quad (126)$$

$$Y_{il} + Z_j \leq 1, \forall i, \forall j, \forall l | i = j \quad (127)$$

$$X_{ilkp}, S_{iljkp}, Q_{jkp} \geq 0, \forall i, \forall l, \forall j, \forall k, \forall p \quad (128)$$

$$Y_{il}, Z_j \ \varepsilon \ \{0,1\}, \forall i, \forall l, \forall j \quad (129)$$

No modelo matemático expresso por (121)-(129), a função objetivo é de minimização dos custos totais em que a primeira e segunda parcelas representam os custos fixos de operação dos CDs e *hubs*, respectivamente. A terceira parcela representa os custos variáveis de operação dos CDs quando há entrega direta entre CDs e clientes, a quarta, os custos variáveis de operação dos *hubs*, quando há entrega direta entre *hubs* e clientes e a quinta, os custos variáveis somados de operação dos CDs e *hubs* quando há entrega indireta. A sexta parcela representa os custos variáveis de transporte quando há entrega direta entre CDs e *hubs*, a sétima, os custos variáveis de transporte quando há entrega indireta e a oitava, os custos variáveis de transporte quando há entrega direta entre *hubs* e clientes. A restrição (122) garante que a passagem por um *hub* só aconteça se ele for aberto e que sua capacidade de transbordo não seja excedida. A restrição (123) garante que a capacidade do CD i de tamanho l pelo produto p não seja ultrapassada, a restrição (125) que a demanda do cliente k pelo produto p seja satisfeita. A restrição (126) garante que um CD i, caso seja aberto, tenha apenas um tamanho e a restrição (127), que um CD e um *hub* não sejam abertos em um mesmo local. As restrições (128) e (129) declaram as variáveis de decisão.

Para simplificar a referência futura desses modelos, chamaremos os modelos apresentados apenas de Modelo-1, Modelo-2 e Modelo-3, conforme apresentado na tabela 6, juntamente com as suas características.

Tabela 6 – Resumo das características de cada modelo

Nome do modelo	Equações	Características
Modelo-1	(106) - (112)	Monoproduto Alocação múltipla Não há escolha de tamanho dos CDs *Hubs* como PTs
Modelo-2 Cenário A	(113) - (120)	Monoproduto Alocação múltipla Escolha de tamanho dos CDs *Hubs* como PTs Maior dist. máx. entre facilidades e clientes
Modelo-2 Cenário B	(113) - (120)	Monoproduto Alocação múltipla Escolha de tamanho dos CDs *Hubs* como PTs Menor dist. máx. entre facilidades e clientes
Modelo-3	(121) - (129)	Multiproduto Alocação múltipla Escolha de tamanho dos CDs *Hubs* como PTs *Hubs* com estoque de produtos de tecnologia Menor dist. máx. para produtos de tecnologia

Fonte: O próprio autor.

6- Experimentos computacionais

Neste capítulo são apresentados os experimentos computacionais com os Modelos-1,2,3 apresentados nas seções (5.1) - (5.3). Estes experimentos foram divididos em duas seções, a seção 6.1 em que mostram-se os resultados de interesse prático como custos e regiões de atendimento de cada CD e *hub* aberto e a seção 6.2 em que mostra-se a perfomance computacional de cada método de resolução testado, Decomposição de Benders, *Branch-and-Cut* e *Dynamic Search*.

6.1- Resultados práticos

Nessa seção apresentam-se os resultados práticos da resolução dos modelos apresentados no Capítulo 5. São apresentados os custos totais obtidos na resolução de cada modelo e é feita uma comparação com os custos atuais. Para efeitos de comparação os custos atuais foram estimados da mesma forma que os modelos testados, com as mesmas premissas para os custos fixos e variáveis dos CDs e com as mesmas equações de custos de transporte, estimadas para diferentes intervalos do valor da distância. Esse custo total atual calculado está bem próximo aos custos reais de acordo com os dados históricos da empresa. Além disso, são mostrados os CDs e *hubs* abertos em cada um com suas regiões de atendimento. As lojas atendidas por cada CD ou *hub* abertos serão apresentados em mapas para melhor visualização e entendimento dos resultados. Todos os modelos foram resolvidos com 13 localidades possíveis para os CDs e 23 para os *hubs*. A Figura 17 mostra a localização dos CDs e *hubs* testados. As 13 localidades testadas para CDs e para *hubs* estão coloridas no mapa, já as 10 localidades que foram testadas apenas para os *hubs*, são os representados em preto.

A Tabela 7 representa a legenda para melhor compreensão da Tigura 17. A Tabela 7 e a Figura 17 auxiliarão no entendimento dos resultados que serão apresentados nas seções a seguir.

A subseção 6.1.1 apresenta os resultados do Modelo-1 , monoproduto com

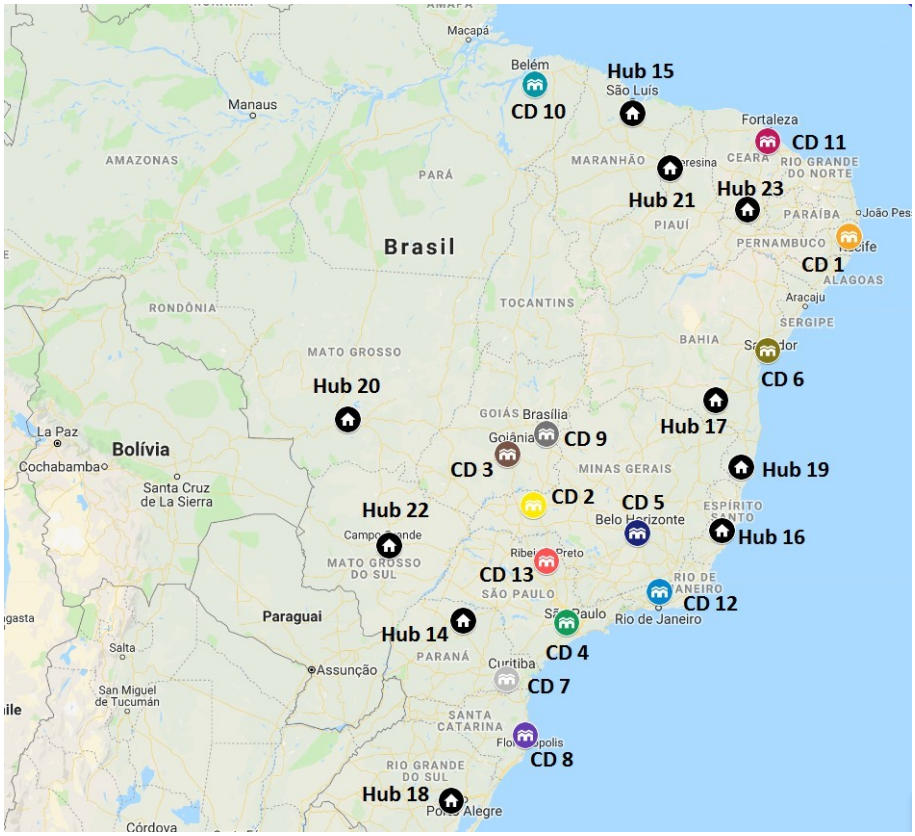


Figura 17 – Mapa com a localização dos candidatos a CDs e *hubs*

Fonte: O próprio autor.

alocação múltipla em que os *hubs* funcionam como locais de transbordo, a subseção 6.1.2 apresenta os resultados do Modelo-2, monoproduto com alocação múltipla e escolha de tamanho dos CDs em que os *hubs* também funcionam como locais de transbordo. O Modelo-2 foi resolvido em dois cenários em que se variam as distâncias máximas permitidas entre CDs e lojas. A subseção 6.1.3 mostra os resultados do Modelo-3, multiproduto com alocação múltipla, escolha de tamanho do CD e estoques avançados de produtos de tecnologia nos *hubs*, que também operam como pontos de transbordo para os demais produtos.

Tabela 7 – Localização dos CDs e *hubs* candidatos

Legenda	Cor	Local
CD 1/ Hub 1	Laranja	Recife
CD 2/ Hub 2	Amarelo	Uberlândia
CD 3/ Hub 3	Marrom	Goiânia
CD 4/ Hub 4	Verde	São Paulo
CD 5/ Hub 5	Azul escuro	Betim
CD 6/ Hub 6	Bege	Salvador
CD 7/ Hub 7	Cinza claro	Curitiba
CD 8/ Hub 8	Roxo	Florianópolis
CD 9/ Hub 9	Cinza escuro	Brasília
CD 10/ Hub 10	Verde claro	Belém
CD 11/ Hub 11	Rosa escuro	Fortaleza
CD 12/ Hub 12	Azul	Nova Iguaçu
CD 13/ Hub 13	Rosa claro	Ribeirão Preto
Hub 14	Preto	Londrina
Hub 15	Preto	São Luis
Hub 16	Preto	Vitória
Hub 17	Preto	Vitória da Conquista
Hub 18	Preto	Porto Alegre
Hub 19	Preto	Teixeira de Freitas
Hub 20	Preto	Cuiabá
Hub 21	Preto	Teresina
Hub 22	Preto	Campo Grande
Hub 23	Preto	Juazeiro do Norte

Fonte: O próprio autor.

6.1.1 Modelo monoproduto com alocação múltipla (Modelo-1)

Como a empresa não possui uma diferenciação de suas características de distribuição por tipo produto, sendo todos operados nos CDs e distribuídos a partir deles de forma semelhante, o primeiro modelo apresentado é uma versão monoproduto com alocação múltipla. No Modelo-1, os *hubs* funcionam como locais para transbordo, conforme sua capacidade potencial de redução de custos pela concentração das operações,

conforme discutido na seção 1.4. Para todos os CDs testados neste modelo foi considerado o tamanho de 60.000 m^2, que é o tamanho máximo ideal considerado pela empresa e próximo ao tamanho médio dos CDs atuais da empresa. Portanto, esse modelo considera as características atuais da sua rede de distribuição.

A solução ótima do Modelo-1 levou a uma solução com custo total de R$1.317.139.758,00. Esse custo representa um valor 1,1% menor que o gasto atual da empresa. O modelo sugere a abertura de 3 CDs, dentre os quais 2 já são atualmente operados pela empresa e estão localizados no Nordeste e no Sudeste. O novo CD proposto para abertura de acordo com a resolução, está localizado na região Centro-Oeste. Houve também a abertura de um *hub*. O mapa 18 apresentado abaixo mostra a distribuição das regiões de atendimento de cada CD e *hub*, em que as cores dos clientes correspondem ao seu CD de atendimento de acordo com a Figura 17 em que mostra-se a localização dos CDs e *hubs* testados.

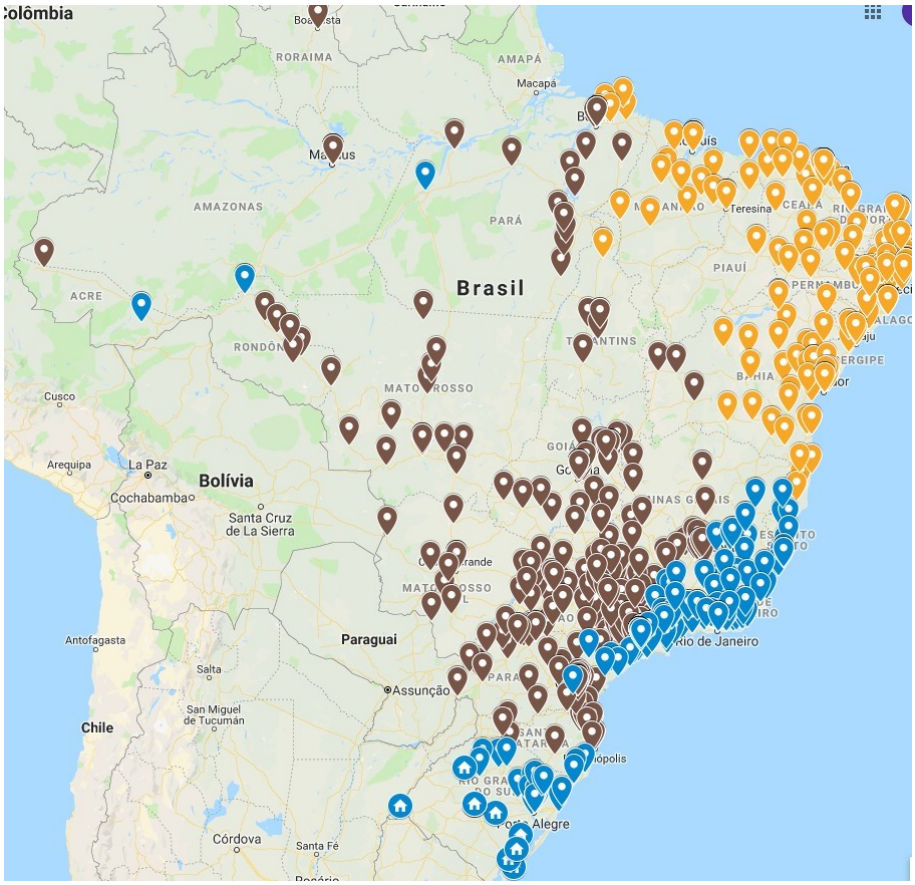


Figura 18 – Mapa com a configuração proposta para o Modelo-1

Fonte: O próprio autor.

No Modelo-1 foram abertos os CDs 1, 3, 12 e o *hub* 18 atendido pelo CD 12. A configuração dos CDs e *hub* abertos como resultados desse modelo apesar de apresentarem um menor custo, apresentam um aumento da distância média entre CDs e lojas representando um pior desempenho no serviço da empresa. A distância média entre os CDs e lojas para este modelo foi de 728,4km, em comparação com os 554,1km de distância média atual. Assim, este resultado apresenta um menor custo, porém é conflitante com a estratégia da empresa em abrir uma maior quantidade de CDs e *hubs* para reduzir as distâncias de distribuição.

6.1.2 Modelo monoproduto com alocação múltipla e escolha de tamanho dos CDs (Modelo-2)

No Modelo-2 foram testados três diferentes tamanhos possíveis para os CDs: 20.000, 40.000 e 60.000 m^2. Ao possuir maior flexibilidade na abertura dos CDs com diferentes tamanhos possíveis espera-se que haja uma redução de custos em relação ao modelo anterior. Além disso, busca-se verificar se a empresa deve continuar investindo na manutenção de CDs de grande porte, conforme os seus atuais, ou se a estratégia de uma maior quantidade de CDs com menor tamanho pode ser importante na redução de custos e melhoria da performance de serviço.

No Modelo-2 Cenário A foram consideradas as seguintes distâncias máximas por região: 1000 km para a região Sudeste, 1600 km para a região Sul, 2000 km para a região Centro-Oeste e Nordeste e 4000 km para as região Norte. Estas distâncias máximas foram definidas de modo a manter as distâncias máximas atuais aproximadas. A Figura 20 apresenta a configuração de CDs que obteve-se como resultado neste modelo e cenário.

No Modelo-2 Cenário A não ocorreu a abertura de nenhum *hub*, provavelmente em função da maior quantidade de CDs abertos, 7 CDs. Os CDs abertos foram o CD 1, CD 2, CD 4, CD 6, CD 7, CD 10 e CD 12. Todos os CDs foram abertos no menor dos três tamanhos disponibilizados, isto é, 20.000 m^2, exceto o CD de número 12 que já é operado pela empresa, com tamanho de $49.000m^2$. Os outros 3 CDs que já são operados pela empresa também foram abertos, porém, com tamanho de $20.000m^2$, enquanto os

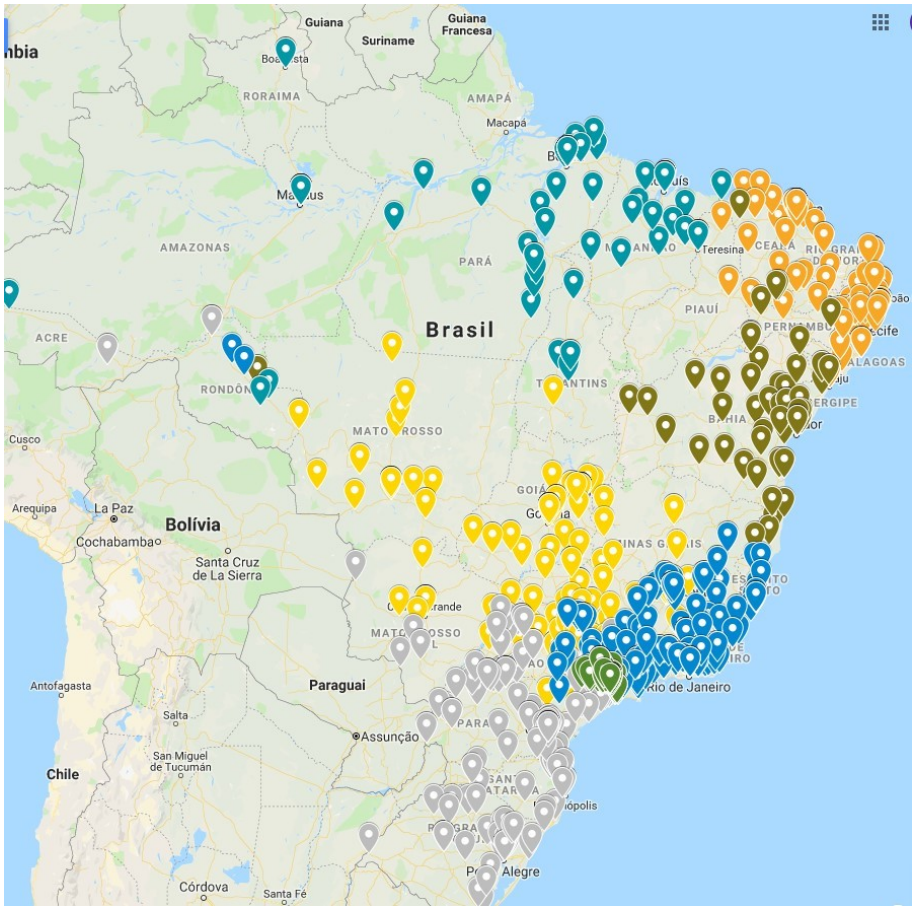


Figura 19 – Mapa com a configuração proposta no Modelo-2 Cenário A

Fonte: O próprio autor.

CDs atuais possuem $60.000m^2$ para os CDs 1 e 2 e $55.000m^2$ para o CD 4.

Observa-se, então, uma tendência diferente em relação à configuração atual da empresa que possui CDs de grande porte. O resultado deste modelo teve como custo total R$ 1.181.583.473,00. Este resultado é 10,3% menor que o do modelo apresentação na seção 6.1.1 anterior e 11,3% menor que o custo atual da empresa. Nesta solução a distância média entre CDs e clientes é de 391,1 km. Dessa forma, observa-se como a escolha correta do tamanho do CD aberto também é fundamental na redução de custos.

O Modelo-1 teve custos fixos de R$ 221.296.967,00, enquanto estes custos no Modelo-2 foi de R$ 233.189.760,00, representando um aumento de 5,3%. Apesar do aumento dos custos fixos, a capacidade útil instalada teve redução de 8,1%. A diferença relevante na solução dos Modelos 1 e 2-A aconteceu nos custos de transporte com uma redução de 47,4%, a redução era esperava pela desconcentração da operação com maior quantidade de facilidades, porém, não o valor desta redução.

Pela redução de custos apresentada observa-se a necessidade de revisão na rede de transporte da empresa, pois mesmo com a abertura de 3 novos CDs ocorre uma redução de custos. Isso acontece, pois os custos atuais com transporte estão muito altos em função da grande distância de alguns CDs para algumas lojas. Assim, o resultado desse modelo é importante por apresentar vantagens em relação a custos e qualidade de serviço em comparação com a configuração atual de CDs e *hubs*.

Conforme já fora pontuado, um dos objetivos da empresa é o aumento do seu desempenho de atendimento, visando reduzir essa distância média de atendimento entre CDs e lojas. Foi feito, então, o Modelo-2 Cenário B em que as distâncias máximas entre CDs e clientes foram reduzidas para: 300 km para as duas cidades com maior volume de vendas, totalizando 16% das lojas; 500 km para as próximas 10 cidades com maior volume de vendas, totalizando 17% das lojas; e 800 km para as demais cidades, 60% das lojas. Porém, 7% das lojas foram exceções e tiveram seus limites de distância maiores. Para 22 lojas mais isoladas no Centro-Oeste, 2 no Nordeste e uma na região Sul, colocou-se limites máximos de distâncias entre 1.000 km e 2.000 km. Para 62 lojas da região Norte e 1 da região Nordeste, a distância máxima foi de 3.500 km e de 4.000 km em função de serem cidades muitas isoladas e em regiões muito distantes. O mapa com a configuração dos CDs abertos é mostrada na Figura 20.

Observa-se uma quantidade ainda maior de CDs abertos, 11 CDs entre os 13 testados, todos com 20.000 m^2 e também não houve a abertura de nenhum *hub*. Novamente, todos os CDs atuais da empresa foram abertos, porém, em menor tamanho. Os CDs abertos neste cenário foram o CD 1, CD 2, CD3, CD 4, CD 5, CD 6, CD 7, CD 8, CD 10, CD 11 e CD 12. O custo total desta solução foi de R$ 1.238.686.340,00. Este custo total é 4,8% maior em relação ao Modelo-2 Cenário A no qual esse modelo foi testado com distâncias máximas maiores. A solução obtida no Modelo-2 Cenário B, na qual a distância média entre CDs e clientes foi de 352,6km, projeta um incremento de R$ 57.102.867,00. Os custos obtidos com a resolução deste modelo neste cenário ainda é 5,9% menor que o resultado do modelo da subseção 6.1.1 em que não há escolha de tamanho dos CDs e 7,0% menores que os custos atuais. Fazendo-se uma comparação entre os custos fixos dos cenários A e B do Modelo-2, houve um aumento de 36,3% no cenário B com um aumento de 19,6% da capacidade instalada. Com o maior número de CDs abertos pela solução no cenário B ocorreu uma redução dos custos de transporte em 6,3%.

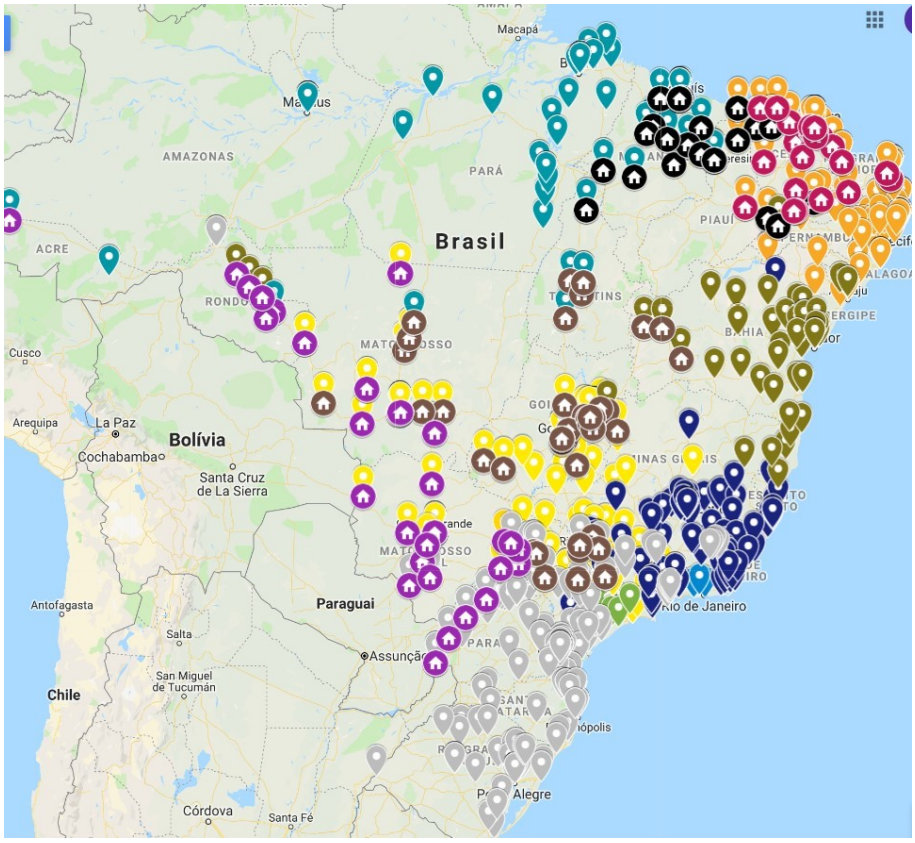


Figura 20 – Mapa com a configuração proposta para o Modelo-2 Cenário B

Fonte: O próprio autor.

Em face a estes resultados, cabe à empresa avaliar se o maior custo obtido na solução do segundo cenário justifica a redução de aproximadamente 38,5 km em média na distância entre CDs e clientes. Vale lembrar que a redução da distância entre facilidades e clientes está alinhada ao objetivo de melhoria no desempenho de atendimento às lojas.

6.1.3 Modelo multiproduto com alocação múltipla e escolha de tamanho dos CDs (Modelo-3)

Nesta subseção são apresentados os experimentos feitos com o Modelo-3, no qual se incorpora uma premissa alinhada com o objetivo, definido pela empresa, de manter estoques avançados de produtos de tecnologia, isto é, estoques mais próximos das lojas. Para isso, nessa modelagem os *hubs* além de serem locais possíveis para transbordo,

também, possuem uma capacidade de armazenagem e distribuição, apenas deste tipo de produto. Assim, este modelo multiproduto foi resolvido com dois tipos de produtos, um produto que representa todos os produtos de tecnologia e outro para representar todos os demais produtos da empresa.

Considerou-se ainda que os raios limitam a distância máxima entre CDs e lojas e entre *hubs* e lojas são específicos por produto. Para os produtos de tecnologia os raios máximos considerados foram: 300 km para as duas cidades com maior volume de vendas deste produto, com aproximadamente 8% do total; 500 km para as demais 23 cidades de maior volumes de venda, que juntas correspondem a 18% do volume total; e 800 km para as demais lojas, com exceções. As exceções foram as mesmas que as consideradas no Método-2 Cenário B, já apresentadas, em algumas do Centro-Oeste e Nordeste foram considerados distâncias de até 2.000 km, para uma loja do Sul de até 1.600 km e algumas lojas do Norte de até 3.500 km por possuírem localização mais isolada. Para o grupo de produtos que não são de tecnologia considerou-se as mesmas distâncias que no Modelo-1: 800 km para a região Sudeste, 1600 km para a região Sul, 2000 km para a região Centro-Oeste e Nordeste e até 4000 km para a região Norte. O mapa com o resultado da configuração obtida na resolução deste modelo é mostrado na figura 21.

Resolvido este modelo, obtém-se uma solução na qual foram abertos 8 CDs, todos com 20.000 m^2 e 5 *hubs*. Os CDs abertos foram CD 1, CD 2, CD 4, CD 5, CD 6, CD 7, CD 10 e CD 12 e os *hubs* foram Hub 3, Hub 8, Hub 11, Hub 21 e Hub 22 . É importante observar que nesta solução, os *hubs* não foram usados para transbordo, mas apenas para a distribuição dos produtos de tecnologia.

O custo obtido com essa resolução foi de R$ 1.236.593.928,00, resultado que é 0,2% (R$ 2.092.412,00) menor que o obtido no Modelo-2 Cenário B, apresentado na subseção 6.1.2, onde foram considerados raios menores. O resultado do custo total também foi 4,7% maior que aqueles obtidos no Modelo-2 Cenário A, descrito na mesma subseção, para o qual foram adotados raios máximos maiores. Este custo também é 7,1% menor que o atual gasto pela empresa. Na solução do Modelo-3, a distância média de distribuição dos produtos de tecnologia foi de 350 km e dos demais produtos de 393 km. Assim, observa-se que essa também é uma importante alternativa, visto todos os produtos estão mais próximos das lojas e ainda mais próximos estão os de tecnologia, que possuem maior valor agregado. Assim, outros ganhos não calculados

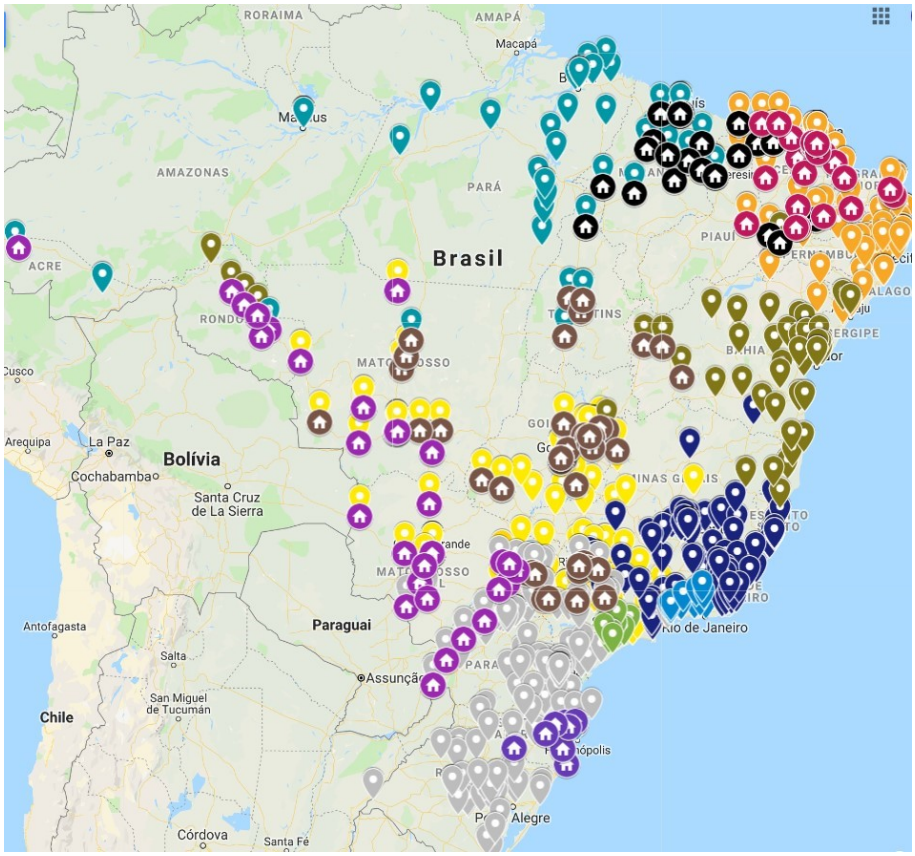


Figura 21 – Mapa com a configuração proposta para o Modelo-3

Fonte: O próprio autor.

também serão possíveis de atingir com essa configuração e podem ser visíveis no nível tático e operacional como o ganho pela maior oportunidade de venda de produtos de tecnologia pela reposição mais rápida.

Observou-se que de acordo com as características atuais da empresa, é possível a obtenção de uma redução de custos com uma mudança no perfil de sua rede de distribuição, visto que os custos obtidos como solução dos modelos foram menores que os custos atuais em todos os cenários. Os cenários que projetaram menores custos também tiveram a abertura de um maior número de facilidades em relação ao número de CDs operados atualmente pela empresa, indicando o alto custo de transporte atual da empresa, que poderia ser reduzido com um maior número de facilidades mais próximos aos clientes.

Assim, observa-se que o Modelo-1 por não haver opção de mais de um tamanho de CDs e por se ter mantido as características de tamanho dos CDs da empresa já em operação, isto é, CDs maiores com R$ $60.000m^2$, fez com que a solução centralizasse

a operação, com a abertura de 3 CDs e 1 *hub* e com o maior custo entre os cenários testados. Com isso, a solução do Modelo-2 com a opção de três tamanhos para os CDs representou uma redução nos custos totais em que no cenário A, a redução de custos foi ainda maior em comparação com o cenário B. As características do Modelo-3, multiproduto e com existência de hierarquia na rede, com certos produtos ofertados apenas em alguns vértices e quando os raios foram reduzidos para apenas parte destes produtos, fez com que os custos totais do Modelo-3 fossem maiores que no Modelo-2 Cenário A, porém, menores que no Modelo-2 Cenário B, em que havia redução dos raios para todos os produtos.

Dentre os cenários testados, o Modelo-2 Cenário A apresentou um bom resultado com uma redução projetada de 11% nos custos totais, o que em termos absolutos equivale a R$ 150.000.000,00 em relação aos custos atuais. Além de uma redução da quilometragem média de distribuição de 554,1 km para 391,1 km.

De acordo com a resolução do Modelo-3 foi possível perceber, que a abertura de pequenos CDs apenas com produtos de grande giro e maior valor agregado, os produtos de tecnologia, pode levar a uma solução com um equilíbrio satisfatório entre custo e nível de serviço. O custo obtido como resultado do Modelo-3 foi de 7,1% menor que o atual. Além disso, esse cenário apresenta uma possibilidade de aproximação dos produtos mais significativos dos clientes, com reposições mais rápidas, mais frequentes, com estruturas de armazenagem de pequenos CDs, com baixo custo em relação a CDs que distribuem todos os produtos comercializados pela empresa. A tabela 8 apresenta um resumo dos resultados discutidos nesta seção, em que P1 são os produtos de tecnologia e P2, os demais produtos.

Tabela 8 – Resumo dos resultados práticos

Modelo	Nº de CDs	Nº de *hubs*	Ganho	Dist. Média (km)
Modelo-1	3	1	1,1%	728,4
Modelo-2 Cenário A	7	0	11,3%	391,1
Modelo-2 Cenário B	11	0	7,0%	352,6
Modelo-3	8	5	7,1%	P1: 349,6/P2: 392,7

Fonte: O próprio autor.

6.2- Resultados computacionais

Nesta seção são apresentados os resultados computacionais obtidos com os três métodos de resolução, disponíveis na ferramenta AIMMS, testados neste trabalho: Decomposição de Benders em sua versão clássica, *Branch and cut* e *Dynamic Search*. Os testes foram realizados em um computador com Intel Core i5-3317 1.3 GHz, 4 GB RAM, Windows 8 64-bit.

Na Tabela 9 são apresentadas informações sobre o porte dos casos que foram resolvidos. Os resultados dos experimentos computacionais foram consolidados na tabela 10.

Tabela 9 – Informações sobre o porte dos casos testados

Modelo	Variáveis contínuas	Variáveis Inteiras	Restrições
Modelo-1	82.902	62	1.316
Modelo-2 Cenário A	28.341	62	1.342
Modelo-2 Cenário B	13.779	62	1.342
Modelo-3	288.452	62	2.696

Fonte: O próprio autor.

No caso das informações de nodos e cortes mostrados na tabela 10, para *Branch-and-Cut* e *Dynamic Search* estão sendo registrados os nodos explorados da árvore e para a Decomposição de Benders, o número de cortes. A partir dos resultados indicados na Tabela 10, observa-se que o método de Decomposição de Benders teve melhor desempenho no modelo de maior porte, no qual se espera encontrar maiores dificuldades para qualquer técnica de solução. Porém, no Modelo-1, o tempo de processamento requerido foi consideravelmente maior que dos outros dois métodos testados, mesmo sendo um tempo relativamente baixo, isto é, aproximadamente 10 minutos. Para o Modelo-2 Cenário B, a Decomposição de Benders também apresentou o maior tempo, porém, todos os métodos apresentam excelente perfomance computacional e a diferença não é significativa. Para o Modelo-2 Cenário-A e o Modelo-3, o método de Decomposição de Benders apresentou o melhor desempenho. Destaca-se a diferença no desempenho para resolução do Modelo-3, com uma maior quantidade de restrições e variáveis, em que a Decomposição de Benders conseguiu alcançar uma solução viável com GAP de 0,10%

Tabela 10 – Resultados computacionais dos três métodos de resolução em cada modelo resolvido

Modelo	Parâmetro	Benders	*Branch-and-cut*	*Dynamic Search*
Modelo-1	Tempo de resolução (s)	604	112	96
	GAP	0%	0%	0%
	Iterações	3.943	17.372	13.785
	Nós/Cortes	920	30	33
Modelo-2 Cenário A	Tempo de resolução (s)	24	413	356
	GAP	0%	0%	0%
	Iterações	963	80.321	85.313
	Nós/Cortes	18	144	192
Modelo-2 Cenário B	Tempo de resolução (s)	9	3	4
	GAP	0%	0%	0%
	Iterações	247	3.729	3.728
	Nós/Cortes	0	0	0
Modelo-3	Tempo de resolução (s)	3646	6093	6466
	GAP	0,1%	0,1%	0,57%
	Iterações	101.622	1.119.363	470.465
	Nós/Cortes	20.125	161	192

Fonte: O próprio autor.

em relação à solução ótima em aproximadamente 1 hora. Neste mesmo caso, os métodos de *Branch-and-Cut* e *Dynamic Search* demandaram tempo de processamento 67% e 77% superiores, para atingir soluções com *gaps* iguais a 0,10 e 0,57%, respectivamente.

7- Conclusões

O presente trabalho apresentou a modelagem e a resolução de variações do Problema de Localização de Facilidades aplicadas à uma empresa do varejo. As adaptações foram adotadas com a finalidade de representarem as características da rede logística da empresa. O estudo se concentra na distribuição física da empresa, justamente um setor que concentra grandes partes dos custos logísticos de uma cadeia de suprimento. A pesquisa conduzida analisa questões de interesse da empresa que está em fase de expansão e modificação da rede de distribuição. Neste sentido, a empresa pretende projetar uma nova rede de distribuição capaz de reduzir as distâncias entre CDs e clientes, reduzindo custos e aumentando seu nível de serviço. Para a criação da sua nova rede de transporte, buscou-se analisar alguns cenários possíveis em que se avaliou a instalação de CDs de menor porte que os atuais, assim como a instalação de *hubs*. Considerou-se que estes *hubs* têm como função: transbordar carga, servindo como concentradores de fluxo; operar como pontos de estocagem avançada para produtos de maior margem de contribuição e maior giro.

Foram desenvolvidos modelos matemáticos de programação inteira considerando diferentes cenários. A primeira modelagem desenvolvida considera uma versão do PLF monoproduto com alocação múltipla e *hubs* com funções somente de transbordo. Neste cenário obteve-se como resultado a abertura de três CDs e um *hub* e o custo foi 1,1% menor que o atual da empresa, porém houve aumento da distância média de 554,1 km para 728,4 km. O segundo modelo desenvolvido é uma versão monoproduto com alocação múltipla e decisões sobre o tamanho dos CDs, disponíveis em três tamanhos, 20.000, 40.000 e 60.000 m^2. Este caso foi resolvido em dois cenários em que o raio máximo entre CDs e clientes variaram. No primeiro cenário foram considerados raios maiores, em média 1.556,2km, levando a uma solução na qual foram abertos 7 CDs, sendo 6 com 20.000 m^2 e um dos atuais da empresa com 49.000 m^2. O custo foi 11% menor que o atual da empresa e uma distância média de 391,1 km. A segunda versão com raios limites menores, em média 823,7km, teve como resultado a abertura de 11 CDs, todos com 20.000 m^2, um custo 7% menor que o atual e uma distância média de 352,6 km. (iii) No terceiro caso testado produziu-se um modelo biproduto com alocação

múltipla, seleção do tamanho dos CDs e uso de *hubs* como PTs e estoque avançado. A solução deste modelo indica a abertura de 8 CDs e 5 *hubs*, porém, nenhum teve a função de transbordo. O custo desta resolução foi 7,1% menor que o atual e a distância média para atendimento das demandas por produtos de tecnologia foi de aproximadamente 350 km e dos demais produtos de 393 km.

Pelos resultados de cada modelo foi possivel concluir que houve uma preferência por CDs de menor porte em uma maior quantidade. Não sendo interesante, então, rotas indiretas, nas quais ocorre transbordo nos *hubs*. Essa característica colabora com a redução do tempo do tempo do ciclo do pedido, havendo menos atividades de carga, descarga, consolidação e desconsolidação envolvidas. Como principais resultados pode-se destacar o Modelo-2 Cenário A, monoproduto com alocação múltipla e escolha de tamanho dos CDs em sua primeira versão com raios limites maiores e que projeta uma economia para a empresa próxima de R$ 30.000.000,00 ao ano. Destaca-se, também, o resultado do cenário 3 com uma economia menor, de R$ 19.000.000,00 ao ano, porém, como uma boa alternativa de aumento do potencial de vendas para os produtos de tecnologia.

De acordo com os resultados obtidos, observou-se que o método de Decomposição de Benders teve melhor desempenho computacional no caso de grande porte testado, com 2.696 restrições e 288.452 variáveis, das quais 62 são binárias. Neste caso, o método de Decomposição de Benders teve resolução 67% mais rápida que o método do *Branch and cut* e 77% mais rápido que o *Dynamic Search*. Esse resultado corrobora com o que já fora indicado por outros trabalhos sobre a aplicação do método em problemas de localização de facilidades no quais há tipicamente muito menos variáveis inteiras que contínuas. No entando,os resultados são muito limitados para se dizer que existe um método com desempenho consistentemente superior ao dos demais. Para isso, seria necessário testar um conjunto maior de casos.

Dentre as limitações do trabalho se destaca a forma em que foi feita a estimativa de determinados custos de acordo com os dados que a empresa possuía no momento do levantamento. Muitos dados foram estimados com uso da média entre os CDs atualmente em operação. Esse estimativa poderia ser melhorada com um estudo mais focado em custos logísticos, o que não se considerou o objetivo principal do presente trabalho. Outra limitação vem do fato da demanda ser modelada como determinística e como um modelo estático. Outra limitação se refere a custos que não foram considerados no trabalho como

os tributários que na prática podem ser relevantes. Como propostas de trabalho futuro sugere-se uma análise dos dados e estimativa dos custos de acordo com estudos de logística presentes na literatura com o objetivo de aumentar a precisão dos resultados do PLF e de fornecer formas de controle mais precisas para a empresa. Além disso, novas premissas poderiam ser testadas na modelagem do problema, com a existência de riscos na cadeia. Também seria interessante avaliar o projeto de rotas de distribuição, uma vez que as operações de distribuição são do tipo LTL (less than truck load). No que se refere ao uso das técnicas de solução, sugere-se ampliar o conjunto de casos de teste para que se possa avaliar melhor o desempenho dos métodos testados. Dados os objetivos do trabalho e limitação de tempo, não se considerou que esta seria uma investigação prioritária. Todavia, o estudo dos métodos de solução constitui importante linha de pesquisa, ainda mais quando a resolução de casos de médio grande porte têm grande relevância prática, como é o caso aqui. Também se sugere uma investigação acerca de versões mais eficientes do método de Decomposição de Benders, assim como de outros métodos de resolução tradicionalmente eficientes em problemas de localização, como a relaxação lagrangeana, por exemplo.

Referências Bibliográficas

Custos Logísticos no Brasil, howpublished = https://www.ilos.com.br/web/analise-de-mercado/relatorios-de-pesquisa/custos-logisticos-no-brasil/, note = Acesso em: 01 set. 2019.

Achterberg, T., Koch, T., and Martin, A. (2005). Branching rules revisited. *Oper. Res. Lett.*, 33(1):42–54.

Arenales, M., Armentano, V., Morabito, R., and Yanasee, H. (2007). *Pesquisa Operacional*. Elsevier, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Aykin, T. (1995). Networking policies for hub-and-spoke systems with application to the air transportation system. *Transportation Science*, 29:201–221.

Babazadeh, R. and Razmi, J. (2012). A robust stochastic programming approach for agile and responsive logistics under operational and disruption risks. *International Journal of Logistics Systems and Management*, 13:458–482.

Ballou, R. (2006). *Gerenciamento da Cadeia da Cadeia de Suprimentos: Logística Empresarial*. Bookman, Ohio, USA, sixth edition.

Benders, J. (1962). Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerische Mathematik*, 4:238–252.

Chaharsooghi, S., Momayezi, F., and Ghaffarinasab, N. (2016). An adaptive large neighborhood search heuristic for solving the reliable multiple allocation hub location problem under hub disruptions. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 8:191–202.

Chen, J.-F. (2007). A hybrid heuristic for the uncapacitated single allocation hub location problem. *Omega*, 35(2):211 – 220.

CPLEX, I. I. (2015). *IBM ILOG CPLEX Opimization Studio CPLEX User's Manual*. Copyright IBM Corporation, Chicago.

Engblom, J., Solakivi, T., Töyli, J., and Ojala, L. (2012). Multiple-method analysis of logistics costs. *International Journal of Production Economics*, 137(1):29 – 35.

Erengüç, , Simpson, N., and Vakharia, A. (1999). Integrated production/distribution planning in supply chains: An invited review. *European Journal of Operational Research*, 115:219–236.

Farahani, R. Z. and Asgari, N. (2007). Combination of mcdm and covering techniques in a hierarchical model for facility location: A case study. *European Journal of Operational Research*, 176(3):1839 – 1858.

Farahani, R. Z., Hekmatfar, M., Arabani, A. B., and Nikbakhsh, E. (2013). Hub location problems: A review of models, classification, solution techniques, and applications. *Computers Industrial Engineering*, 64(4):1096 – 1109.

Farahani, R. Z., Hekmatfar, M., Fahimnia, B., and Kazemzadeh, N. (2014). Hierarchical facility location problem: Models, classifications, techniques, and applications. *Computers Industrial Engineering*, 68:104 – 117.

Fernandes, D., Silva, A., Aloise, D., and Rocha, C. (2011). Heurísticas para otimização de um sistema multinível de transporte de carga. *ENEGEP*.

Galvão, R. D. (2004). Uncapacitated facility location problems: contributions. *Pesquisa Operacional*, 24:7 – 38.

Galvão, R. D., Espejo, L. G. A., and Boffey, B. (2002). A hierarchical model for the location of perinatal facilities in the municipality of rio de janeiro. *European Journal of Operational Research*, 138(3):495 – 517.

Geoffrion, A. (1972). Generalized benders decomposition. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 10:237–260.

Geoffrion, A. M. and Graves, G. W. (1974). Multicommodity distribution system design by benders decomposition. *Management Science*, 20(5):822–844.

Ghaffarinasab, N. and Kara, B. (2018). Benders decomposition algorithms for two variants of the single allocation hub location problem. *Networks and Spatial Economics*.

Ghanmi, A. (2011). Canadian forces global reach support hubs: Facility location and aircraft routing models. *JORS*, 62:638–650.

Ghiani, G., Laporte, G., and Musmanno, R. (2004). *Introduction to Logistics Systems Planning and Control*. Halsted Press, New York, NY, USA.

Gonzalez-Feliu, J. (2008). *Models and Methods for the City Logistics: The Two-Echelon Capacitated Vehicle Routing Problem*. PhD thesis.

Gonzalez-Feliu, J. (2011). Two-echelon transportation optimisation: Unifying concepts via a systematic review. *Working papers on operations management*, 2.

Gudehus, T. and Kotzab, H. (2012). *Comprehensive Logistics*.

Hinojosa, Y., Puerto, J., and Fernández, F. (2000). A multiperiod two-echelon multicommodity capacitated plant location problem. *European Journal of Operational Research*, 123(2):271 – 291.

Ho, S. C. (2015). An iterated tabu search heuristic for the single source capacitated facility location problem. *Applied Soft Computing*, 27(11):169–178.

Kim, H. and O'Kelly, M. (2009). Reliable p-hub location problems in telecommunication networks. *Geographical Analysis*, 41:283 – 306.

Klibi, W., Martel, A., and Guitouni, A. (2010). The design of robust value-creating supply chain networks: A critical review. *European Journal of Operational Research*, 203(2):283 – 293.

Klose, A. (2000). A lagrangean relax-and-cut approach for the two-stage capacitated facility location problem. *European Journal of Operational Research*, 126:408–421.

Kwon, S., Park, K., Lee, C., Kim, S.-S., Kim, H.-J., and Liang, Z. (2006). Supply chain network design and transshipment hub location for third party logistics providers. volume 3982, pages 928–933.

Kůdela, J. and Popela, P. (2015). Two-stage stochastic facility location problem: Ga with benders decomposition. *Mendel*, 2015:53–58.

Lee, C. Y. (1991). An optimal algorithm for the multiproduct capacitated facility location problem with a choice of facility type. *Computers Operations Research*, 18(2):167 – 182.

Lee, C. Y. (1993). A cross decomposition algorithm for a multiproduct-multitype facility location problem. *Computers Operations Research*, 20(5):527 – 540.

Li, J., Prins, C., and Chu, F. (2012). A scatter search for a multi-type transshipment point location problem with multicommodity flow. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 23:1–15.

Magnanti, T. and Wong, R. (1981). Accelerating benders decomposition: Algorithmic enhancement and model selection criteria. *Operations Research*, 29.

O'Kelly, M. (1986). The location of interacting hub facilities. *Transportation Science*, 20:92–106.

Ortiz-Astorquiza, C., Contreras, I., and Laporte, G. (2018). Multi-level facility location problems. *European Journal of Operational Research*, 267(3):791 – 805.

Ostrowski, J., Vannelli, A., F Anjos, M., and Groupe d'études et de recherche en analyse des décisions (Montréal, Q. (2010). *Symmetry in Scheduling Problems*.

Owsinski, J. W., Stańczak, J., Barski, A., Sep, K., and Sapiecha, P. (2015). Graph based approach to the minimum hub problem in transportation network. pages 1641–1648.

Rahimi, Y., Tavakkoli-Moghaddam, R., Mohammadi, M., and sadeghi, m. (2015). Multi-objective hub network design under uncertainty considering congestion: An m/m/c/k queue system. *Applied Mathematical Modelling*.

Razmi, J. and Rahmanniya, F. (2013). Design of distribution network using hub location model with regard to capacity constraint and service level. *Int. J. of Logistics Systems and Management*, 16:386 – 398.

Rodríguez, V., Alvarez, M., and Barcos, L. (2007). Hub location under capacity constraints. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 43(5):495 – 505.

Shen, Z.-J. M. (2005). A multi-commodity supply chain design problem. *IIE Transactions*, 37(8):753–762.

Sousa, A. (2018). Multi-product distribution in the fashion and retail industry: A case study. Master's thesis, Universidade do Porto, Porto.

Tragantalerngsak, S., Holt, J., and Ronnqvist, M. (1997). Lagrangian heuristics for the two-echelon, single-source, capacitated facility location problem. *European Journal of Operational Research*, 102(3):611 – 625.

Töyli, J., Häkkinen, L., Ojala, L., and Naula, T. (2008). Logistics and financial performance: An analysis of 424 finnish small and medium-sized enterprises. *International Journal of Physical Distribution Logistics Management*, 38:57–80.

Ullrich, O., Randerath, B., and Kuckertz, P. (2012). A simulation-based approach on robust airline job pairing. *Simulation Notes Europe (SNE)*, 22.:77–82.

Wolsey, L. (1998). *Integer Programming*.

Yaman, H. (2009). The hierarchical hub median problem with single assignment. *Transportation Research Part B: Methodological*, 43(6):643–658.

Yaman, H., Kara, B., and Tansel, B. (2007). The latest arrival hub location problem for cargo delivery systems with stopovers. *Transportation Research Part B: Methodological*, 41:906–919.

Zarrinpoor, N., Saber Fallahnezhad, M., and Pishvaee, M. (2017). Design of a reliable hierarchical location-allocation model under disruptions for health service networks: A two-stage robust approach. *Computers Industrial Engineering*, 109.

Zeng, A. and Rossetti, C. (2003). Developing a framework for evaluating the logistics costs in global sourcing processes: An implementation and insights. *International Journal of Physical Distribution Logistics Management*, 33:785–803.

Zgodavova, Z., Rozenberg, R., and Szabo, S. (2018). Analysis of point-to-point versus hub-and-spoke airline networks. pages 158–163.

Zhong, W., Juan, Z., Zong, F., and Su, H. (2018). Hierarchical hub location model and hybrid algorithm for integration of urban and rural public transport. *International Journal of Distributed Sensor Networks*, 14:155014771877326.

Zhou, Z., Che, A., and Yan, P. (2012). A mixed integer programming approach for multi-cyclic robotic flowshop scheduling with time window constraints. *Applied Mathematical Modelling*, 36(8):3621 – 3629.

Şahin, G. and Süral, H. (2007). A review of hierarchical facility location models. *Computers Operations Research*, 34(8):2310 – 2331.