CEFET/RJ
DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

RELAÇÕES DE NORDHAUS-GADDUM PARA OS AUTOVALORES DAS MATRIZES LAPLACIANA E LAPLACIANA SEM SINAL

Rodrigo da Cruz Grijó

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção e Sistemas, do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, CEFET/RJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

Orientador: Leonardo Silva de Lima
Coorientadora: Carla Silva Oliveira

Rio de Janeiro
Novembro de 2018

RELAÇÕES DE NORDHAUS-GADDUM PARA OS AUTOVALORES DAS MATRIZES LAPLACIANA E LAPLACIANA SEM SINAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção e Sistemas do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, CEFET/RJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

Rodrigo da Cruz Grijó

Banca Examinadora:

Presidente, Professor Dr. Leonardo Silva de Lima (CEFET/RJ) (orientador)

Professora Dra. Carla Silva Oliveira (ENCE/IBGE) (coorientadora)

Professor Dr. Rafael Garcia Barbastefano (CEFET/RJ)

Professora Dra. Nair Maria Maia de Abreu (UFRJ)

Professora Dra. Maria Aguieiras Alvarez de Freitas (UFRJ)

Professor Dr. André Ebling Brondani (UFF)

Rio de Janeiro

Novembro de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central do CEFET/RJ

CEFET/RJ – Sistema de Bibliotecas / Biblioteca Central

G857 Grijó, Rodrigo da Cruz
Relações de Nordhaus-Gaddum para os autovalores das matrizes laplaciana e laplaciana sem sinal / Rodrigo da Cruz Grijó.—2018.
67f. : il. ; enc.

Dissertação (Mestrado) Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca , 2018.
Bibliografia : f. 64-67
Orientador : Leonardo Silva de Lima
Coorientadora : Carla Silva Oliveira

1. Matrizes (Matemática). 2. Autovalores. 3. Teoria dos grafos. 4. Engenharia de produção. I. Lima, Leonardo Silva de (Orient.). II. Oliveira, Carla Silva (Coorient.). III. Título.

CDD 512.9434

Elaborada pela bibliotecária Mariana Oliveira CRB-7/5929

AGRADECIMENTOS

A Deus que me dá a vida e me mantém de pé. Aos meus orientadores Leonardo Lima e Carla Oliveira pelos ensinamentos que levarei para a vida e a todos os companheiros de PPPRO, em especial, Diego e Marcella, que viveram intensamente comigo esta jornada. Não posso deixar de agradecer a todos os amigos que tem estado sempre ao meu lado, mesmo nestes tempos de muita luta e superação, me ajudando a enfrentar e vencer as tempestades que se revelam mais árduas do que este mestrado. Especialmente, agradeço aos maiores amigos e amores da vida, Carol, Karla e Thiago. Por fim, dedico esta obra a toda a minha família por ajudarem a construir o homem que sou e àquela que é a razão para que eu nunca desista, o meu espelho, a minha amada filha Julia Carolina.

”...pois quando tudo se perdeu e a sorte desapareceu, abaixo de Deus só ficaram vocês...”

RESUMO

Em 1956, os pesquisadores Edward A. Nordhaus e Jerry W. Gaddum estudaram o número cromático de um grafo juntamente com o número cromático de seu grafo complementar e obtiveram cotas inferiores e superiores para a soma e o produto deste invariante em função do número de vértices. Desde então, qualquer inequação para a soma ou produto de um invariante de um grafo e o mesmo invariante em seu grafo complementar passou a ser denominada por relação de Nordhaus-Gaddum. Neste trabalho, reunimos todos os resultados existentes na literatura para as relações de Nordhaus-Gaddum envolvendo os autovalores das matrizes laplaciana e laplaciana sem sinal. Como contribuições originais, desenvolvemos soluções parciais para duas conjecturas sobre maior autovalor da matriz laplaciana, apresentamos uma nova cota inferior de Nordhaus-Gaddum para o segundo maior autovalor da matriz laplaciana e provamos que ela é a melhor possível. Além disso, produzimos novas cotas superiores de Nordhaus-Gaddum para este autovalor e com base nestes resultados, propusemos uma conjectura para estudos futuros.

Palavras-chave: relações de Nordhaus-Gaddum; autovalores da matriz laplaciana; autovalores da matriz laplaciana sem sinal; cotas.

ABSTRACT

In 1956, Edward A. Nordhaus and Jerry W. Gaddum studied the chromatic number in a graph and in its complement together. Since then, any bound on the sum and/or the product of an invariant in a graph and the same invariant in its complement is called a Nordhaus-Gaddum type relation. In this work, we present a survey of these relations for Laplacian and signless Laplacian eigenvalues. As original contributions, we present partial solutions for two conjectures about the largest Laplacian eigenvalue, we also present a new sharp lower bound and show that it is the best possible. In addition, we establish new Nordhaus-Gaddum sharp upper bounds for the second largest Laplacian eigenvalue and based on this results, we propose a new conjecture to future research

Key-words: Nordhaus-Gaddum type inequalities; Laplacian eigenvalues; signless Laplacian eigenvalues; bounds.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Grafo simples G 14
Figura 2 – O caminho P_4 e o ciclo C_3 14
Figura 3 – G grafo, H subgrafo de G e $G[V']$ subgrafo induzido de G 15
Figura 4 – Grafo conexo G e grafo desconexo H com três componentes conexas . 15
Figura 5 – Grafo G e seu complementar $\overline{G}$ 15
Figura 6 – Grafo G e grafo linha $\ell(G)$ 17
Figura 7 – Grafo K_4 17
Figura 8 – Grafo bipartido G e grafo bipartido completo $K_{3,4}$ 17
Figura 9 – Estrela $K_{1,4}$ 18
Figura 10 – Grafo $K_4 + e$ 18
Figura 11 – Grafos C_3 e P_2 e o produto cartesiano $C_3 \times P_2$ 19
Figura 12 – Grafo *split completo* $SC_{7,4}$ e *threshold* com sequência (110011) 20
Figura 13 – Grafo $\mathcal{G}(2,4) \cong P_4[K_2, \overline{K_4}, \overline{K_4}, K_2]$ 20
Figura 14 – Grafo $G_3(3,2,1,4)$ 21
Figura 15 – Grafo $B_3(3,2,1,4)$ 22
Figura 16 – Grafos $T(s,t)$ para $n = 7$ 22
Figura 17 – Grafo $\overline{K_8} \vee K_2 \cong SC_{10,2}$ 47
Figura 18 – Grafos extremais K_6, $K_6 - e$, $K_{1,5}$, $K_{3,3}$, $K_5 + e$, $\overline{K_2} \vee 2K_2$, $\mathcal{G}(2,1)$, $\mathcal{G}(1,2)$ 55
Figura 19 – Grafos extremais K_7, $K_7 - e$, $K_{1,6}$, $K_6 + e$, $K_1 \vee 2K_3$ 55

SUMÁRIO

Introdução **10**

Objetivos e contribuições 11

Metodologia 12

Estrutura 12

1 Definições básicas **13**

1.1 Teoria dos Grafos 13

1.2 Teoria de Matrizes 22

1.3 Teoria Espectral dos Grafos 30

2 Revisão da literatura **38**

2.1 Matriz de adjacência 38

2.2 Matriz laplaciana 39

2.2.1 Cotas para $\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G})$ 40

2.2.2 Cotas para $\mu_1(G)\mu_1(\overline{G})$ 44

2.3 Matriz laplaciana sem sinal 45

2.3.1 Cotas para $q_1(G) + q_1(\overline{G})$ 45

2.3.2 Cotas para $q_1(G)q_1(\overline{G})$ 47

3 Relações de Nordhaus-Gaddum para $\mu_1(G)$ **48**

3.1 Uma prova parcial da Conjectura 2.1 48

3.1.1 Comparação entre os Teoremas 2.16 e 3.1 50

3.2 Uma prova parcial da Conjectura 2.2 51

4 Relações de Nordhaus-Gaddum para $\mu_2(G)$ **53**

4.1 Uma nova cota inferior 53

4.2 Duas novas cotas superiores 56

Conclusão **63**

Referências Bibliográficas **63**

Introdução

Um grafo é uma estrutura $G = (V, E)$, que consiste em um conjunto finito V cujos elementos são denominados vértices e um conjunto finito E de combinações de dois elementos de V denominados arestas. A Teoria Espectral dos Grafos é uma área da Teoria dos Grafos que relaciona a estrutura de um grafo às propriedades das matrizes associadas a eles. Com a representação matricial podemos tratar os grafos como estruturas algébricas, relacionando as propriedades estruturais do grafo ao espectro das matrizes associadas, ou seja, aos autovalores destas representações matriciais.

O marco inicial dos estudos em Teoria Espectral dos Grafos data de 1931, quando Hückel [36], motivado por estudos em Química Quântica, verificou que os autovalores da matriz obtida através da representação de uma molécula de hidrocarboneto como um grafo estavam relacionados a energia dos elétrons associados a esta molécula. No entanto, a fundamentação teórica matemática foi estabelecida somente a partir do artigo de Collatz e Sinogowitz [61] em 1957 e da tese de doutorado de Cvetkovic [18] em 1971.

Um grafo pode ser representado por diversas matrizes, tais como, matriz de adjacência, incidência, laplaciana e laplaciana sem sinal. Dentre estas, o estudo dos autovalores relacionados as matrizes laplaciana e laplaciana sem sinal tem despertado grande interesse dos pesquisadores nos últimos anos, tendo em vista que estas apresentam importantes informações sobre a estrutura dos grafos. Os autovalores laplacianos têm relação com diversos invariantes de grafos, tais como, conectividade, número isoperimétrico, diâmetro e corte maximal [63]. Além disso, de acordo com Cvetkovic [14], estudos computacionais em [33] e [59] indicam que o espectro destas matrizes, especialmente o da matriz laplaciana sem sinal, descreve de forma mais adequada as propriedades estruturais do grafo, podendo ser mais eficiente para a caracterização de grafos pelo seu espectro.

Dentre as questões abordadas sobre o espectro das matrizes associadas a grafos, destaca-se a obtenção de cotas superiores e inferiores para estes autovalores e suas relações com os invariantes de grafos. A determinação de invariantes combinatórios em grafos é um problema computacionalmente difícil, pertencente a classe dos problemas NP-Completo. Por outro lado, atualmente existem algoritmos aproximativos bem eficientes para o cálculo dos autovalores de matrizes simétricas. Portanto, o fato de autovalores estarem relacionados a parâmetros combinatoriais NP-Completo ressalta a importância

da obtenção de cotas para estes autovalores e sua aplicação na aceleração de algoritmos exatos e heurísticas para a determinação de invariantes combinatórios de grafos.

Em 1956, os pesquisadores Edward A. Nordhaus (1912-1998) e Jerry W. Gaddum (1924-1964) [54] estudaram o número cromático de um grafo G juntamente com o número cromático de seu grafo complementar $\overline{G}$ e obtiveram cotas inferiores e superiores para a soma e o produto deste invariante em função do número de vértices. Desde então, qualquer inequação para a soma ou produto de um invariante de um grafo e o mesmo invariante em seu grafo complementar passou a ser denominada por relação de Nordhaus-Gaddum. Assim, uma relação do tipo Nordhaus-Gaddum pode ser escrita como

$$\theta_1(G) \leq \gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq \theta_2(G)$$

ou

$$\beta_1(G) \leq \gamma(G)\gamma(\overline{G}) \leq \beta_2(G),$$

onde γ é um invariante de G e $\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2$ são funções dadas em termos da ordem e/ou outro invariante de G.

Neste sentido, a obtenção e o aprimoramento das relações de Nordhaus-Gaddum para autovalores das matrizes associadas a grafos constituem uma importante ferramenta para o desenvolvimento da Teoria Espectral dos Grafos.

Objetivos e contribuições

O escopo desta dissertação está nas relações de Nordhaus-Gaddum envolvendo invariantes espectrais, mais precisamente, aquelas envolvendo os autovalores das matrizes laplaciana e laplaciana sem sinal.

Diversos pesquisadores se debruçaram sobre estes temas, tais como, Afshari *et al.* [2], Aouchiche e Hansen [5], Ashraf e Tayfeh-Rezaie [6], Chen e Das [12], Shi [56], You e Liu [67], Zhai [68] entre outros. Neste sentido, o objetivo desta dissertação é estudar as relações de Nordhaus-Gaddum e obter novos resultados quando os invariantes forem os autovalores das matrizes laplaciana e laplaciana sem sinal. Além disso, trataremos de duas conjecturas em aberto na literatura com o objetivo de resolvê-las por completo ou parcialmente.

Como contribuições originais, desenvolvemos soluções parciais para as duas

conjecturas sobre maior autovalor da matriz laplaciana, respectivamente, propostas por You e Liu [67] e Ashraf e Tayfeh-Rezaie [6]. Apresentamos uma nova cota inferior de Nordhaus-Gaddum para o segundo maior autovalor da matriz laplaciana e provamos que ela é a melhor possível. Além disso, produzimos novas cotas superiores de Nordhaus-Gaddum para este autovalor. Por fim, propusemos uma conjectura para estudos futuros.

Metodologia

A fim de alcançar os objetivos propostos, a metodologia utilizada consiste da busca nas principais bases de dados científicos, *Scopus, Science Direct* e *Web of Science* através de acesso ao Portal de Periódicos da CAPES. Como *strings* de busca utilizamos os termos *Nordhaus-Gaddum + Laplacian* e *Nordhaus-Gaddum + signless Laplacian*. Além disso, incluímos o termo de busca *Laplacian spread*, considerando a relação direta entre esta quantidade e a soma dos maiores autovalores laplacianos do grafo e de seu complementar. Como ferramentas computacionais, utilizamos os softwares *Nauty*, *BlueJ* e *Autographix.*

Estrutura

Esta dissertação de mestrado foi construída da seguinte forma: no Capítulo 1 apresentamos os pré requisitos básicos da Teoria dos Grafos, Teoria de Matrizes e da Teoria Espectral dos Grafos, necessários para a compreensão deste texto. O Capítulo 2 traz uma revisão bibliográfica das desigualdades de Nordhaus-Gaddum para os autovalores pesquisados. No Capítulo 3 são apresentados os primeiros resultados originais que ampliam os estudos das relações de Nordhaus-Gaddum para o maior autovalor da matriz laplaciana. Destacamos a demonstração parcial das Conjecturas 2.1 e 2.2. No Capítulo 4 nos dedicamos a construção de novas cotas de Nordhaus-Gaddum inferiores e superiores para o segundo maior autovalor da matriz laplaciana, apresentando quatro novos teoremas e duas proposições. Por fim, apresentamos uma breve conclusão.

1 Definições básicas

Neste capítulo são apresentadas as definições e os resultados da Teoria dos Grafos, da Teoria de Matrizes e da Teoria Espectral dos Grafos, necessários para o desenvolvimento deste trabalho e para compreensão dos capítulos posteriores.

1.1 Teoria dos Grafos

As noções básicas da Teoria dos Grafos abordadas nesta seção, em geral, podem ser encontradas em [1] e [47].

Definição 1.1. *Um grafo é uma estrutura $G = (V, E)$, composta por um conjunto finito e não vazio $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, cujos elementos são denominados vértices e um conjunto $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, cujos elementos são denominados arestas. Quando não houver ambiguidade, utilizamos apenas $V = V(G)$ e $E = E(G)$.*

Definição 1.2. *A ordem e o tamanho de um grafo G correspondem, respectivamente, a cardinalidade do seu conjunto de vértices e de arestas, denotados por $|V| = n$ e $|E| = m$.*

Definição 1.3. *Cada aresta $e = v_iv_j \in E$ é formada por um par não ordenado de elementos de V. Neste caso, dizemos que e é incidente em v_i e v_j e que v_i e v_j são vértices adjacentes ou vizinhos.*

Definição 1.4. *O conjunto dos vértices adjacentes ou vizinhos a v_i é chamado vizinhança de v_i, denotado por $N_G(v_i) = \{v_j \in V;\ v_iv_j \in E\}$. O grau do vértice v_i é a cardinalidade do conjunto $N_G(v_i)$, denotado por $d(v_i) = |N_G(v_i)|$.*

Definição 1.5. *O grau máximo de G é denotado por $\Delta = \Delta(G) = \max\{d(v_i);\ v_i \in V\}$ e o grau mínimo por $\delta = \delta(G) = \min\{d(v_i);\ v_i \in V\}$.*

O número $\overline{d} = \overline{d}(G) = \frac{1}{n}\sum_{v_i \in V} d(v_i)$ é denominado de grau médio de G.

Geometricamente os vértices são comumente representados por pontos e as arestas por ligações entre estes pontos. Neste trabalho trataremos apenas de grafos simples, ou seja, não orientados e sem múltiplas arestas ou *loops*.

Exemplo 1.1. *Na Figura 1 temos um grafo G com $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$. O grau máximo de G é $\Delta(G) = d(v_4) = 4$ e o grau mínimo é $\delta(G) = d(v_5) = 1$.*

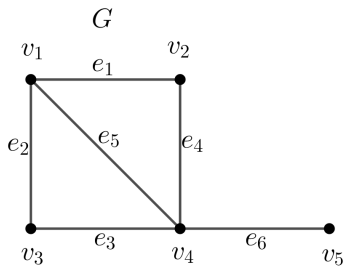


Figura 1: Grafo simples G

Definição 1.6. *Uma sequência finita $v_1, v_2, \ldots, v_k$ de vértices de um grafo é dita uma cadeia de v_1 a v_k, quando $v_i v_{i+1} \in E$ para $1 \leq i \leq k-1$. Cadeias onde o primeiro e o último vértices são os mesmos são denominadas cadeias fechadas.*

Um caminho é uma cadeia em que todos os vértices são distintos. Um caminho fechado é denominado ciclo. O comprimento de uma cadeia é dado pelo número de arestas que nela ocorre. O caminho e o ciclo com n vértices são denotados, respectivamente, por P_n e C_n.

Exemplo 1.2. *A Figura 2 apresenta o caminho P_4 e o ciclo C_3, conhecido como triângulo.*

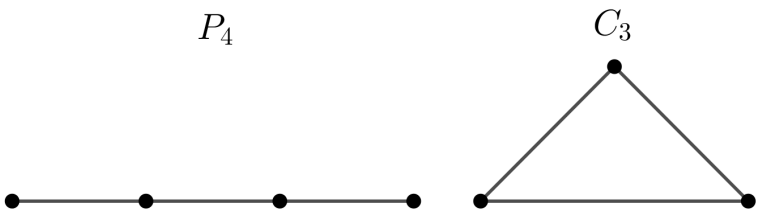


Figura 2: O caminho P_4 e o ciclo C_3

Definição 1.7. *Dizemos que um grafo G é conexo quando ele possui um único vértice ou quando existe um caminho ligando qualquer par de seus vértices. Caso contrário, o grafo é denominado desconexo.*

Definição 1.8. *Um grafo $H = (V', E')$ é dito um subgrafo de G se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$, denotado $H \subseteq G$. Quando cada par de vértices é adjacente no subgrafo se, e somente se, eles são adjacentes em G, temos um subgrafo induzido de G, denotado por $G[V']$.*

Em um grafo desconexo G, dizemos que C_i é uma componente conexa de G, quando C_i é conexo e subgrafo maximal de G, ou seja, não existe subgrafo conexo $H \subseteq G$, tal que $C_i \subseteq H$.

Exemplo 1.3. *Na Figura 3 vemos o grafo G, um subgrafo H e um subgrafo induzido $G[V']$ de G.*

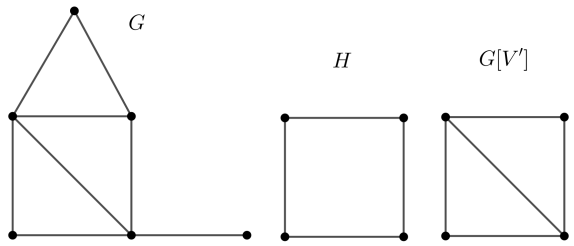


Figura 3: G grafo, H subgrafo de G e $G[V']$ subgrafo induzido de G

Exemplo 1.4. *A Figura 4 apresenta um grafo conexo G e um grafo desconexo H com três componentes conexas.*

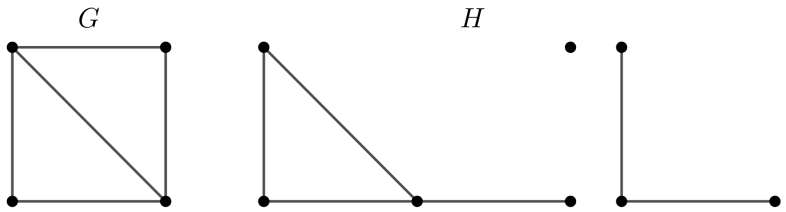


Figura 4: Grafo conexo G e grafo desconexo H com três componentes conexas

Definição 1.9. *O grafo completo, denotado por K_n, é um grafo no qual quaisquer dois vértices distintos são adjacentes.*

Definição 1.10. *O grafo complementar de G, denotado por $\overline{G}$, é o grafo $\overline{G} = (V, \overline{E})$, onde um par de vértices é adjacente em $\overline{G}$ se, e somente se, não o for em G, ou seja, $v_iv_j \in \overline{E}$ se, e somente se, $v_iv_j \notin E$.*

Exemplo 1.5. *A Figura 5 descreve um grafo G e seu complementar $\overline{G}$. Note que ao tomarmos o complementar do grafo complementar teremos novamente o grafo inicial.*

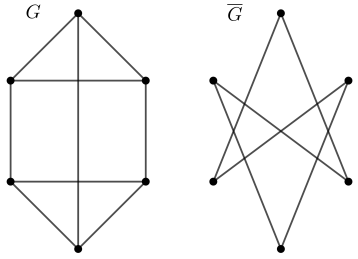


Figura 5: Grafo G e seu complementar $\overline{G}$

Definição 1.11. *Seja G um grafo de ordem n. O grau máximo de $\overline{G}$ é denotado por $\overline{\Delta} = \Delta(\overline{G}) = n - 1 - \delta(G)$. Analogamente o grau mínimo de $\overline{G}$ é dado por $\overline{\delta} = \delta(\overline{G}) = n - 1 - \Delta(G)$.*

Definição 1.12. *Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo. Um caminho de comprimento mínimo entre dois vértices v_i e v_j é chamado uma geodésica entre v_i e v_j. A distância entre dois vértices v_i e v_j de G, denotada por $d(v_i, v_j)$, é o comprimento de uma geodésica entre v_i e v_j.*

Definição 1.13. *O máximo das distâncias entre dois vértices quaisquer de G é chamado diâmetro de G e denotado por $d(G)$. Quando G é um grafo desconexo escrevemos $d(G) = \infty$.*

Definição 1.14. *Uma clique em G é um subconjunto não vazio de V tal que todo par de vértices é adjacente, ou seja, $\varnothing \neq W \subseteq V$ é uma clique se, e somente se, $G[W] = K_t$, onde $t = |W|$.*

Definição 1.15. *Um conjunto independente em G é um subconjunto não vazio de V tal que todo par de vértices são não adjacentes, ou seja, $\varnothing \neq W \subseteq V$ é um conjunto independente se, e somente se, $G[W] = \overline{K_t}$, onde $t = |W|$.*

Definição 1.16. *Uma coloração de vértices de um grafo G é uma função $c : V \to S$ tal que $c(v_i) \neq c(v_j)$, sempre que v_i e v_j são adjacentes. A cardinalidade do menor conjunto S tal que $c : V \to S$ é uma coloração de vértices de G é denominado número cromático de G, denotado por $\chi(G)$.*

Definição 1.17. *Sejam $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ grafos simples de ordem n. Dizemos que G_1 e G_2 são isomorfos, denotado por $G_1 \cong G_2$, se existe uma função bijetora $f : V_1 \to V_2$, de modo que $v_1v_2 \in E_1$ se, e somente se, $f(v_1)f(v_2) \in E_2$.*

Algumas famílias de grafos com características específicas recebem nomes diferentes. A seguir apresentamos algumas famílias que aparecem ao longo deste trabalho.

Definição 1.18. *O grafo linha $\ell(G)$ de G é o grafo obtido tomando as arestas de G como vértices e dois vértices são adjacentes em $\ell(G)$ se as arestas correspondentes em G forem incidentes.*

Exemplo 1.6. *A Figura 6 exibe o grafo G e seu grafo linha $\ell(G)$.*

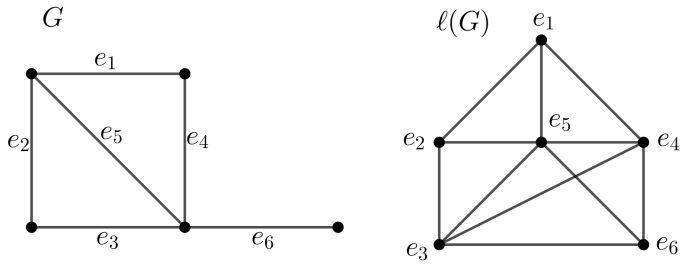


Figura 6: Grafo G e grafo linha $\ell(G)$

Definição 1.19. *Um grafo G é dito k-regular ou regular de grau k se todos os seus vértices possuem grau k, isto é, $d(v_i) = k, \forall v_i \in V$.*

Exemplo 1.7. *Na Figura 7 temos o grafo K_4, que é 3-regular.*

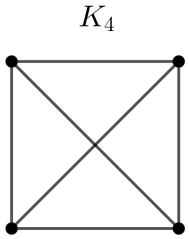


Figura 7: Grafo K_4

Definição 1.20. *Um grafo G é k-partido se existem k partições não vazias e disjuntas do seu conjunto de vértices, $V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k = V$, tais que, não hajam vértices adjacentes em cada partição V_i. Se $k = 2$, dizemos que G é bipartido, se $k = 3$, G é tripartido.*

Definição 1.21. *Um grafo é bipartido completo, denotado $K_{r,s}$, se $V = V_1 \cup V_2$, com $|V_1| = r$, $|V_2| = s$, onde cada vértice de V_1 é adjacente a todos os vértices de V_2.*

Exemplo 1.8. *A Figura 8 exibe um grafo bipartido G e o grafo bipartido completo $K_{3,4}$.*

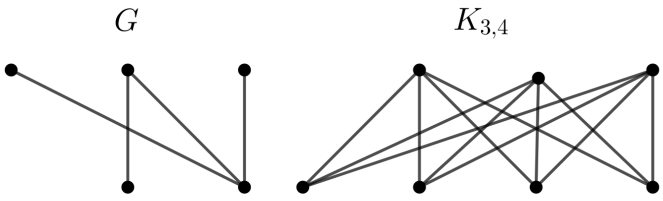


Figura 8: Grafo bipartido G e grafo bipartido completo $K_{3,4}$

Proposição 1.1. *Um grafo é bipartido se, e somente se, não possui cadeias fechadas de comprimento ímpar.*

Definição 1.22. *Uma árvore é um grafo conexo e sem ciclos. Em uma árvore, todo vértice v_i tal que $d(v_i) = 1$ é chamado de vértice pendente ou folha. Uma árvore com $n - 1$ folhas é chamada estrela e denotada por $K_{1,n-1}$. Uma floresta é um grafo sem ciclos.*

Exemplo 1.9. *Na Figura 9 ilustramos a estrela $K_{1,4}$.*

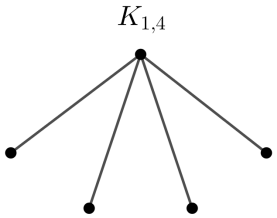


Figura 9: Estrela $K_{1,4}$

Definição 1.23. *Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo com $|V| = n$, $|E| = m$ e $c \in \mathbb{N}$. Se $m = n + c - 1$ então G é chamado de um grafo c-cíclico. Se $c = 0$, então G é uma árvore. Quando $c = 1$, então G é chamado de um grafo unicíclico, para $c = 2$, bicíclico, e assim por diante.*

Definição 1.24. *Seja G um grafo. Denotamos por $G - e$ o grafo obtido a partir de G, pela exclusão de uma aresta $e \in E(G)$.*

Definição 1.25. *Denotamos $K_{n-1} + e$ o grafo de n vértices obtido de K_{n-1} através da adição de uma nova aresta a um de seus vértices.*

Exemplo 1.10. *A Figura 10 ilustra o grafo $K_4 + e$.*

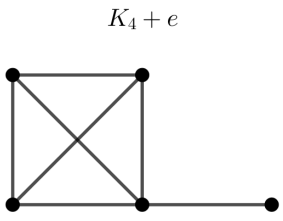


Figura 10: Grafo $K_4 + e$

Definição 1.26. *Sejam $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ grafos com n_1 e n_2 vértices, respectivamente. Consideremos $V_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_{n_1}\}$ e $V_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n_2}\}$. Temos que:*

i) a união de G_1 e G_2 é o grafo $G_1 \cup G_2$, cujo conjunto de vértices é $V_1 \cup V_2$ e cujo conjunto de arestas é $E_1 \cup E_2$. Esta operação também é chamada de soma de G_1 e G_2 e pode ser representada por $G_1 + G_2$;

ii) a junção (join) de G_1 e G_2 é o grafo $G_1 \vee G_2$, cujo conjunto de vértices é $V_1 \cup V_2$ e cujo conjunto de arestas é $E_1 \cup E_2 \cup \{u_i v_j : u_i \in V_1$ e $v_j \in V_2\}$;

iii) o produto cartesiano de G_1 e G_2 é o grafo $G_1 \times G_2$, cujo conjunto de vértices é $V = V_1 \times V_2$, onde o vértice (u_i, v_j) é adjacente ao vértice (u_l, v_p) se $u_i u_l \in E_1$ e $v_j = v_p$ em V_2 ou $v_j v_p \in E_2$ e $u_i = u_l$ em V_1.

Exemplo 1.11. *Na Figura 11 apresentamos um exemplo do produto cartesiano $C_3 \times P_2$.*

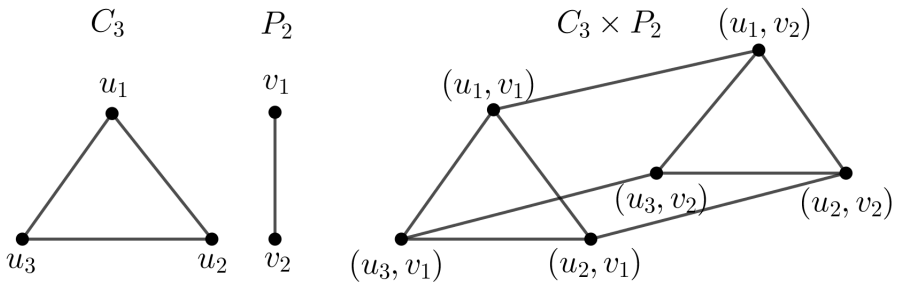


Figura 11: Grafos C_3 e P_2 e o produto cartesiano $C_3 \times P_2$

Definição 1.27. *Dizemos que $G = (V, E)$ é um grafo split de ordem n se o seu conjunto de vértices V pode ser particionado em dois subconjuntos V_1 e V_2, tais que $G[V_1]$ é uma clique de tamanho k e $G[V_2]$ é um conjunto independente de tamanho $n - k$. Quando todos os vértices desse conjunto independente forem adjacentes a todos os vértices da clique, esse grafo é chamado de split completo, denotado $SC_{n,k}$.*

Definição 1.28. *Dizemos que $G = (V, E)$ é um grafo threshold de ordem n se ele pode ser construído a partir do grafo vazio, definindo-se uma sequência binária $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de 0's e 1's, onde $a_i = 0$ representa a adição de um vértice isolado e $a_i = 1$ representa a adição de um vértice dominante, ou seja, adjacente a todos os outros vértices.*

As aplicações da família de grafos *threshold* abrangem diversas áreas, como por exemplo na sincronização de processos paralelos [43]. Na Teoria Espectral esta família tem sido estudada quanto a sua energia laplaciana e laplaciana sem sinal [34]. Grafos *threshold* também podem ser definidos como grafos livres de $2K_2$, C_4 e P_4 [45]. Notemos que um grafo *split* completo $SC_{n,k}$ é um grafo *threshold* com sequência $0^{n-k}1^k$.

Exemplo 1.12. *A Figura 12 apresenta o grafo split completo $SC_{7,4}$ e o grafo threshold resultante da sequência (110011).*

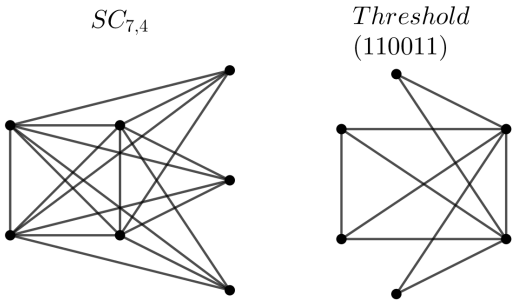


Figura 12: Grafo *split completo* $SC_{7,4}$ e *threshold* com sequência (110011)

Definição 1.29 ([11])**.** *Considere $\mathcal{F} = \{G_1, G_2, \ldots, G_p\}$ uma família de grafos G_i de ordem n_i e seja H um grafo com conjunto de vértices $V(H) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$.*

Definimos o $H-$join dos grafos G_i como o grafo $G = H[G_1, G_2, \ldots, G_p]$, formado a partir da atribuição de cada vértice $v_i \in V(H)$ como um grafo $G_i \in \mathcal{F}$ e tomando o join de G_i com G_j se v_i é adjacente a v_j em H.

Em particular, quando $H \cong P_2$, o P_2-join é a operação usual de join entre G_1 e G_2, ou seja, $P_2[G_1, G_2] = G_1 \vee G_2$.

Definição 1.30 ([10])**.** *Denotamos por $\mathcal{G}(r, s)$ o $H-$join de $K_r, \overline{K_s}, \overline{K_s}K_r$ onde $H \cong P_4$, $n = 2(r + s)$ com $r, s \geq 1$, ou seja, $\mathcal{G}(r, s) \cong P_4[K_r, \overline{K_s}, \overline{K_s}K_r]$.*

Exemplo 1.13. *A Figura 13 ilustra o grafo $\mathcal{G}(2, 4)$.*

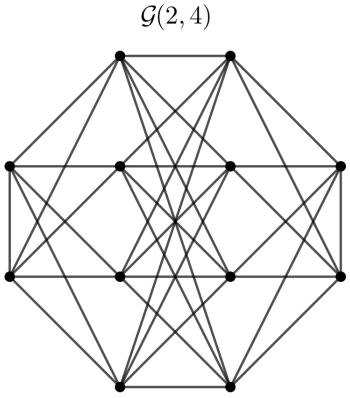


Figura 13: Grafo $\mathcal{G}(2, 4) \cong P_4[K_2, \overline{K_4}, \overline{K_4}, K_2]$

Definição 1.31. *Denotamos por $G(n, d)$ a família de grafos conexos com n vértices e diâmetro d.*

Definição 1.32 ([62]). *A classe de grafos $G_d(n_1, n_2, \ldots, n_d, n_{d+1})$ é composta por $d+1$ cliques $K_{n_1}, K_{n_2}, \ldots, K_{n_d}, K_{n_{d+1}}$, onde a variável n_i, com $1 \leq i \leq d+1$ é a ordem da $i-$ésima clique e tomando-se o join de cada clique K_{n_i} com as cliques vizinhas $K_{n_{i-1}}$ e $K_{n_{i+1}}$, $2 \leq i \leq d$, onde $d = d(G)$.*

A classe de grafos $G_d(n_1, n_2, \ldots, n_d, n_{d+1})$ tem $\sum_i^{d+1} n_i$ vértices e $\sum_{i=1}^{d+1} \frac{n_i(n_i-1)}{2} + \sum_{i=1}^{d} n_i n_{i+1}$ arestas. Obviamente, qualquer grafo $G_d(n_1, n_2, \ldots, n_d, n_{d+1})$ tem diâmetro d, que é igual a distância entre os vértices da clique K_{n_1} e os vértices da clique $K_{n_{d+1}}$.

O grau de qualquer vértice da clique K_{n_i} é $n_i - 1 + n_{i+1} + n_{i-1}$, para $2 \leq i \leq d$. Qualquer vértice em K_{n_1} tem grau $n_1 - 1 + n_2$ e todo vértice em $K_{n_{d+1}}$ tem grau $n_{d+1} - 1 + n_d$.

Exemplo 1.14. *A Figura 14 exibe o grafo $G_3(3, 2, 1, 4)$, com 10 vértices e diâmetro 3.*

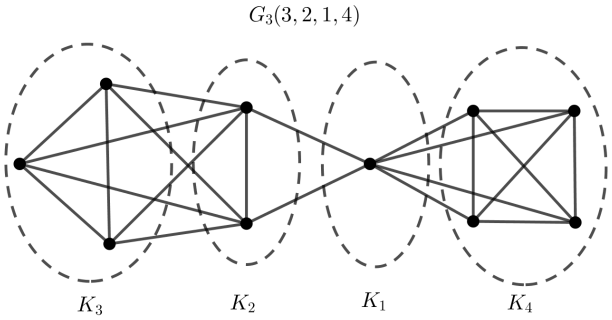


Figura 14: Grafo $G_3(3, 2, 1, 4)$

Definição 1.33 ([69]). *Definimos a classe de grafos $B_d(n_1, n_2, \ldots, n_d, n_{d+1})$, composta por $d+1$ conjuntos independentes $\overline{K}_{n_1}, \overline{K}_{n_2}, \ldots, \overline{K}_{n_d}, \overline{K}_{n_{d+1}}$, onde a variável n_i, com $1 \leq i \leq d+1$ é a ordem do $i-$ésimo conjunto independente e tomando-se o join de cada conjunto independente $\overline{K}_{n_i}$ com os conjuntos independentes vizinhos $\overline{K}_{n_{i-1}}$ e $\overline{K}_{n_{i+1}}$, $2 \leq i \leq d$, onde $d = d(B)$.*

A classe de grafos $B_d(n_1, n_2, \ldots, n_d, n_{d+1})$ tem $\sum_i^{d+1} n_i$ vértices e $\sum_{i=1}^{d} n_i n_{i+1}$ arestas. Obviamente, qualquer grafo $B_d(n_1, n_2, \ldots, n_d, n_{d+1})$ é bipartido e tem diâmetro d, que é igual a distância entre os vértices do conjunto independente $\overline{K}_{n_1}$ e os vértices do conjunto independente $\overline{K}_{n_{d+1}}$.

O grau de qualquer vértice do conjunto independente $\overline{K}_{n_i}$ é $n_{i+1} + n_{i-1}$, para $2 \leq i \leq d$. Qualquer vértice em $\overline{K}_{n_1}$ tem grau n_2 e todo vértice em $\overline{K}_{n_{d+1}}$ tem grau n_d.

Exemplo 1.15. *A Figura 15 ilustra o grafo $B_3(3,2,1,4)$, com 10 vértices e diâmetro 3.*

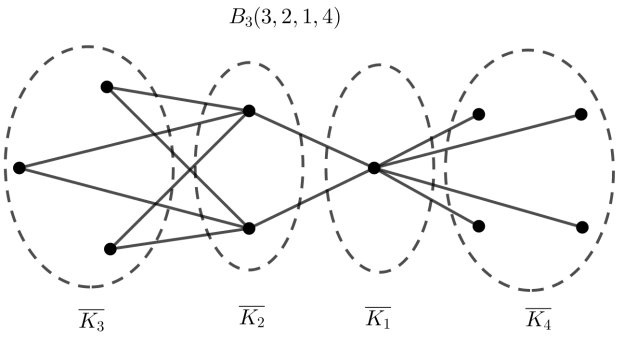


Figura 15: Grafo $B_3(3,2,1,4)$

Definição 1.34 ([29])**.** *Seja $1 \leq s \leq t \leq n-2$. A família de árvores $T(s,t)$ possui $n = s+t+2$ vértices e é formada a partir de dois vértices u e v adjacentes e não pendentes, os quais estão conectados, respectivamente, a s e t vértices pendentes.*

Exemplo 1.16. *A Figura 16 exibe os grafos não isomorfos da família $T(s,t)$, com $n = 7$.*

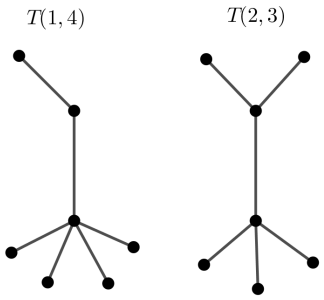


Figura 16: Grafos $T(s,t)$ para $n = 7$

1.2 Teoria de Matrizes

Nesta seção apresentamos alguns conceitos básicos de Álgebra Linear e Teoria de Matrizes em suas formulações mais abrangentes, com destaque para aqueles envolvendo matrizes simétricas. Tais resultados são a base para a compreensão dos conceitos em Teoria Espectral dos Grafos apresentados nos próximos capítulos. A menos que seja mencionado anteriormente, todas as matrizes consideradas são simétricas. Como referências, utilizamos basicamente os livros de Horn e Johnson [35] e Meyer [48].

Definição 1.35. *Seja $M = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n com entradas reais. A transposta de M é a matriz M^T obtida trocando-se as linhas pelas colunas de M, ou seja, $M^T = [b_{ij}]$, onde $b_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$. Se $M^T = M$, dizemos que M é simétrica.*

Definição 1.36. *Denotamos por $diag(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ a matriz diagonal de ordem n cujas entradas que não estão na diagonal principal são nulas. A matriz diagonal de ordem n em que todas as entradas da diagonal principal são iguais a 1 é chamada matriz identidade e a denotamos por I.*

Definição 1.37. *Seja M uma matriz quadrada de ordem n. Um escalar λ é autovalor de M se existe um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq 0$, tal que $M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. O vetor $\mathbf{v}$ é chamado um autovetor de M associado ao autovalor λ.*

Definição 1.38. *Denotamos por $Span(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k})$ o subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelos k vetores coluna $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k}$. O subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelos autovetores associados ao autovalor λ de M é o autoespaço associado a λ que denotamos por $\mathcal{E}(\lambda)$.*

Definição 1.39. *O polinômio característico de M é definido por $P_M(x) = det(M - xI)$ e suas raízes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são exatamente os autovalores de M.*

Definição 1.40. *A multiplicidade geométrica do autovalor λ, denotado por $m_g(\lambda)$, é a dimensão do autoespaço associado a este autovalor e a multiplicidade algébrica de λ, denotado por $m_a(\lambda)$, é o número de vezes que este é raiz de $P_M(x) = det(M - xI)$.*

Definição 1.41. *O espectro de uma matriz quadrada M é o multiconjunto dos autovalores de M dispostos em ordem não crescente, denotado $Spec(M) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Em alguns casos, o espectro é representado como a matriz $2 \times s$, onde a primeira linha é constituída pelos s autovalores distintos de M dispostos em ordem decrescente e a segunda, pelas suas respectivas multiplicidades algébricas, ou seja, $Spec(M) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_s \\ m_a(\lambda_1) & \ldots & m_a(\lambda_s) \end{bmatrix}$.*

Definição 1.42. *O raio espectral de M, denotado por $\rho(M)$, é o maior valor absoluto de todos os autovalores de M, isto é, $\rho(M) = \max\{|\lambda_i|;\ 1 \leq i \leq n\}$, onde λ_i é um autovalor de M.*

Definição 1.43. *Uma matriz quadrada M é invertível se existe uma matriz quadrada N satisfazendo $MN = NM = I$, onde I representa a matriz identidade de ordem n. A matriz N é representada por M^{-1} e denominada matriz inversa de N. Quando $M^{-1} = M^T$ dizemos que a matriz M é ortogonal.*

Definição 1.44. *Dizemos que duas matrizes quadradas M e N são semelhantes se existe uma matriz invertível P tal que $M = P^{-1}NP$. Uma matriz quadrada M é diagonalizável se for semelhante a uma matriz diagonal.*

Proposição 1.2. *Matrizes semelhantes possuem o mesmo espectro.*

Definição 1.45. *O traço de uma matriz M, denotado traço(M), é a soma dos elementos da diagonal principal de M.*

Definição 1.46. *Sejam $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Definimos o produto interno de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ por $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$. A norma de um vetor $\mathbf{x}$ é definida por $||\mathbf{x}|| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$. Se $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$, dizemos que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são ortogonais, para quaisquer $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ diferentes de 0. Além disso, quando $||\mathbf{x}|| = ||\mathbf{y}|| = 1$ dizemos que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são ortonormais.*

A seguir, apresentamos alguns resultados sobre matrizes simétricas que nos auxiliam na demonstração dos Teoremas 1.2 e 1.4. No que segue M é uma matriz simétrica de ordem n com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$ e autovetores $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n} \in \mathbb{R}^n$.

Proposição 1.3. *Se M é uma matriz simétrica, então todos os seus autovalores são reais.*

Proposição 1.4. *Se M é uma matriz simétrica, então os autovetores associados a autovalores distintos de M são ortogonais.*

Lema 1.1. *Seja M uma matriz simétrica e real de ordem n. Então os autovalores de M satisfazem a seguinte igualdade para todo $k = 1, \ldots, n$.*

$$\lambda_k(-M) = -\lambda_{n-k+1}(M).$$

Teorema 1.1 (Teorema Espectral)**.** *Seja M uma matriz simétrica de ordem n com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$ e autovetores $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n} \in \mathbb{R}^n$, respectivamente associados a cada autovalor. Então existe uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada pelos autovetores de M. Além disso, existe uma matriz P ortogonal cujas colunas são os autovetores de M, tal que $P^TMP = E$, onde $E = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ é a matriz diagonal cujas entradas são os autovalores de M. Ou seja, a matriz M é diagonalizável.*

Dada uma matriz simétrica M de ordem n com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$ e autovetores $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n} \in \mathbb{R}^n$, sabemos que os autovalores de M são dados pela

forma quadrática $\lambda_i = \langle A\mathbf{v_i}, \mathbf{v_i}\rangle = \mathbf{v_i}^T A\mathbf{v_i}$ para $1 \leq i \leq n$. Neste sentido, o Princípio de Rayleigh e o Teorema de Courant-Fischer caracterizam os autovalores de matrizes simétricas como soluções de problemas de otimização.

Teorema 1.2 (Princípio de Rayleigh)**.** *Seja M uma matriz simétrica de ordem n e $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ seus autovalores em ordem não crescente. Então*

$$\lambda_1 = \max_{||\mathbf{x}||=1} \langle M\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \quad \textit{e} \quad \lambda_n = \min_{||\mathbf{x}||=1} \langle M\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle.$$

Demonstração. Seja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ unitário. Como P é matriz ortogonal, podemos tomar o vetor $P^T\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ também unitário, com $a_i = (P^T\mathbf{x})_i$ representando a $i-$ ésima coordenada do vetor $P^T\mathbf{x}$. Pelo Teorema 1.1, $E = P^TMP$, ou seja, $M = PEP^T$, onde $E = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Assim

$$\langle M\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \mathbf{x}^T M\mathbf{x} = \mathbf{x}^T PEP^T\mathbf{x} = (P^T\mathbf{x})^T E(P^T\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 a_i^2 = \lambda_1.$$

Analogamente,

$$\langle M\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \mathbf{x}^T M\mathbf{x} = \mathbf{x}^T PEP^T\mathbf{x} = (P^T\mathbf{x})^T E(P^T\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_n a_i^2 = \lambda_n.$$

Como $\lambda_1 = \langle Av_1, v_1\rangle$ e $\lambda_n = \langle Av_n, v_n\rangle$ o resultado está provado. □

O Corolário 1.1 apresenta uma formulação do Princípio de Rayleigh para um vetor $0 \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, não necessariamente unitário.

Corolário 1.1. *Seja M uma matriz simétrica de ordem n e $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ seus autovalores em ordem não crescente. Então*

$$\lambda_1 = \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\langle M\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} \quad \textit{e} \quad \lambda_n = \min_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\langle M\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}.$$

A expressão $\frac{\langle M\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}$ é denominada quociente de Rayleigh.

Demonstração. Basta notar que $\frac{\langle M\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle} = \frac{1}{||\mathbf{x}||^2}\langle M\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \langle M\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}, \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}\rangle$, onde $\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}$ é um vetor unitário. □

Observando que $\lambda_i = \langle A\mathbf{v_i}, \mathbf{v_i}\rangle$, o Teorema 1.2 pode ser generalizado para os demais autovalores de M no Teorema 1.3.

Teorema 1.3 (Princípio de Rayleigh generalizado)**.** *Seja M uma matriz simétrica de ordem n e $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ seus autovalores em ordem não crescente. Então, para $2 \leq k \leq n-1$ e $1 \leq\ j \leq k-1$,*

$$\lambda_k = \max_{\substack{||\mathbf{x}||=1 \\ \mathbf{x} \perp \mathbf{v_j}}} \langle M\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle.$$

Analogamente, para $2 \leq k \leq n-1$ e $k+1 \leq\ j \leq n$,

$$\lambda_k = \min_{\substack{||\mathbf{x}||=1 \\ \mathbf{x} \perp \mathbf{v_j}}} \langle M\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle.$$

Demonstração. Fixado $2 \leq k \leq n-1$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $||\mathbf{x}|| = 1$ e $\mathbf{x} \perp \mathbf{v_j}$, tomamos o vetor $P^T\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ também unitário, com $a_i = (P^T\mathbf{x})_i$ representando a $i-$ésima coordenada do vetor $P^T\mathbf{x}$, então para cada $1 \leq\ j \leq k-1$, $\langle P^T\mathbf{x}, P^T\mathbf{v_j} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v_j} \rangle = 0$, sendo que $P^T\mathbf{v_j} = \mathbf{e_j}$ é o $j-$ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$. Portanto, $a_i = 0$ para $1 \leq i \leq k-1$. Logo,

$$\langle M\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = (P^T\mathbf{x})^T E(P^T\mathbf{x}) = 0 + \sum_{i=k}^{n} \lambda_i a_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_k a_i^2 = \lambda_k.$$

Analogamente, tomando $\mathbf{x} \perp \mathbf{v_j}$ para cada $k+1 \leq\ j \leq n$, então $\langle P^T\mathbf{x}, P^T\mathbf{v_j} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v_j} \rangle = 0$, portanto $a_i = 0$ para $k-1 \leq i \leq n$. Logo,

$$\langle M\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = (P^T\mathbf{x})^T E(P^T\mathbf{x}) = 0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_k a_i^2 = \lambda_k.$$

□

Assim como feito anteriormente, o Teorema 1.3 pode ser reformulado para um vetor $0 \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, não necessariamente unitário, como vemos no Corolário 1.2.

Corolário 1.2. *Seja M uma matriz simétrica de ordem n e $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ seus autovalores em ordem não crescente. Então, para $2 \leq k \leq n-1$ e $1 \leq\ j \leq k-1$,*

$$\lambda_k = \max_{\substack{\mathbf{x} \neq 0 \\ \mathbf{x} \perp \mathbf{v_j}}} \frac{\langle M\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Analogamente, para $2 \leq k \leq n-1$ *e* $k+1 \leq\ j \leq n$,

$$\lambda_k = \min_{\substack{\mathbf{x}\neq 0 \\ \mathbf{x}\perp\mathbf{v_j}}} \frac{\langle M\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}.$$

O Teorema de Courant-Fisher traz uma formulação independente para obtenção de autovalores através da solução de problemas de otimização, como vemos no Teorema 1.4.

Teorema 1.4 (Teorema de Courant-Fisher)**.** *Seja* M *uma matriz simétrica com autovalores* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$*. Então, para* $1 \leq k \leq n$,

$$\lambda_k = \max_{\substack{U \\ dimU=k}} \min_{\substack{\mathbf{x}\in U \\ \mathbf{x}\neq 0}} \frac{\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} \tag{1.1}$$

e

$$\lambda_k = \min_{\substack{U \\ dimU=n-k+1}} \max_{\substack{\mathbf{x}\in U \\ \mathbf{x}\neq 0}} \frac{\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}, \tag{1.2}$$

onde U *denota um subespaço do* $\mathbb{R}^n$*.*

Demonstração. Primeiramente, provaremos a equação (1.1). Seja U um subespaço qualquer de $\mathbb{R}^n$ de dimensão k e $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ autovetores ortonormais associados, respectivamente, a $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Tomando os subespaços $S = [\mathbf{v_k}, \ldots, \mathbf{v_n}]$ e $T = [\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}]$, temos que existe um $\mathbf{x} \in U \cap S$, $\mathbf{x} \neq 0$, pois do contrário teríamos $dimU + dimS = n + 1$ o que é impossível. Neste caso $\mathbf{x}$ pode ser escrito como $\mathbf{x} = \sum_{i=k}^{n} a_i\mathbf{v_i}$. Sendo assim, tomando a matriz ortogonal P dos autovetores, tal que $P^TMP = E = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ e tomando o vetor $P^T\mathbf{x}$, cujas entradas são da forma $(a_k, \ldots, a_n)^T$, já que $\mathbf{x} \in S$. Então, o quociente de Rayleigh de $\mathbf{x}$ é dado por

$$\frac{\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} = \frac{(P^T\mathbf{x})^T E(P^T\mathbf{x})}{(P^T\mathbf{x})^T(P^T\mathbf{x})} = \frac{\sum_{i=k}^{n} \lambda_i a_i^2}{\sum_{i=k}^{n} a_i^2} \leq \frac{\sum_{i=k}^{n} \lambda_k a_i^2}{\sum_{i=k}^{n} a_i^2} = \lambda_k.$$

Agora, para $U = T$ temos de modo análogo que $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} a_i\mathbf{v_i}$ e

$$\frac{\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} = \frac{(P^T\mathbf{x})^T E(P^T\mathbf{x})}{(P^T\mathbf{x})^T(P^T\mathbf{x})} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i^2}{\sum_{i=1}^{k} a_i^2} \geq \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_k a_i^2}{\sum_{i=1}^{k} a_i^2} = \lambda_k.$$

Logo,

$$\lambda_k = \max_{\substack{U \\ dimU=k}} \min_{\substack{\mathbf{x}\in U \\ \mathbf{x}\neq 0}} \frac{\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}.$$

A equação (1.2) segue da aplicação do Lema 1.1 à equação (1.1).

$$\begin{aligned} -\lambda_k(A) = \lambda_{n-k+1}(-A) &= \max_{\substack{U \\ dimU=n-k+1}} \min_{\substack{\mathbf{x}\in U \\ \mathbf{x}\neq 0}} \frac{\langle(-A)\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}{\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle} \\ &= \max_{\substack{U \\ dimU=n-k+1}} \left(-\max_{\substack{\mathbf{x}\in U \\ \mathbf{x}\neq 0}} \frac{\langle A\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}{\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle} \right) \\ &= -\left(\min_{\substack{U \\ dimU=n-k+1}} \max_{\substack{\mathbf{x}\in U \\ \mathbf{x}\neq 0}} \frac{\langle A\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}{\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle} \right). \end{aligned}$$

□

O próximo teorema, estabelecido pelo matemático alemão Hermann Weyl (1885-1955), é a fonte de muitas cotas envolvendo autovalores de matrizes simétricas, oferecendo uma importante ferramenta para o desenvolvimento das relações de Nordhaus-Gaddum. Embora essas desigualdades fundamentais sejam conhecidas há quase um século, o caso da igualdade foi estabelecido apenas em 1994 por So [57], e seu trabalho foi inspirado no artigo de Ikebe *et al.* [37]. Por conveniência, apresentamos abaixo o teorema completo de Weyl e So.

Teorema 1.5 (Teorema de Weyl)**.** *Sejam M e N matrizes reais e simétricas de ordem n, com autovalores $\lambda_i(M)$ e $\lambda_j(N)$ e seja $1 \leq i, j \leq n$. Então:*

i) $\lambda_i(M) + \lambda_j(N) \leq \lambda_{i+j-n}(M+N)$, *se* $n+1 \leq i+j$*;*

ii) $\lambda_i(M) + \lambda_j(N) \geq \lambda_{i+j-1}(M+N)$, *se* $n+1 \geq i+j$*;*

iii) $\lambda_i(M+N) \geq \lambda_i(M)$*, se N é positiva semidefinida.*

Em qualquer um destes casos, a igualdade ocorre se, e somente se, existir um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ não nulo que é um autovetor para cada um dos três autovalores envolvidos.

O Teorema de Perron-Frobenius é um dos mais importantes em Teoria Espectral dos Grafos, principalmente para o estudo do maior autovalor de um grafo. Antes de enunciá-lo, relembramos algumas definições e resultados preliminares.

Definição 1.47. *Uma matriz simétrica M de ordem n é denominada positiva semidefinida se $\mathbf{x}^T M\mathbf{x} \geq 0$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Equivalentemente, M é positiva semidefinida se, e somente se, todos os seus autovalores são não negativos.*

Proposição 1.5. *Se uma matriz M pode ser escrita como $M = BB^T$ para alguma matriz B, então M é positiva semidefinida.*

Definição 1.48. *Dada uma permutação* $\phi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$*, denotamos* $M_\phi = QMQ^T$ *a matriz permutada, onde* Q *é a matriz obtida permutando-se as linhas da matriz identidade de acordo com* ϕ*.*

Proposição 1.6. M_ϕ *e* M *possuem os mesmos autovalores e se* $\mathbf{v}$ *é um autovetor de* M*, então* $\mathbf{v}_\phi$ *é um autovetor de* M_ϕ*.*

Definição 1.49. *Dizemos que a matriz simétrica* M *é irredutível se não existe permutação* ϕ*, tal que* $M_\phi = \begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix}$*, onde* X *e* Y *são matrizes quadradas. Caso contrário,* M *é dita uma matriz redutível.*

Definição 1.50. *Uma matriz* M *é denominada não negativa (positiva) quando suas entradas são não negativas (positivas). Denotamos por* $M \geq 0$ $(M > 0)$*.*

Proposição 1.7. *Seja* M *uma matriz não negativa de ordem* n*. Então* M *é irredutível se, e somente se,* $(I + M)^{n-1} > 0$ *ou, equivalentemente,* $I + M + M^2 + \ldots + M^{n-1} > 0$*.*

Teorema 1.6 (Teorema de Perron-Frobenius)**.** *Seja* M *uma matriz simétrica de ordem* n*, não negativa, irredutível e com autovalores* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$*. Então:*

i) $\lambda_1 > 0$ *e existe um autovetor associado com todas as coordenadas positivas;*

ii) $\lambda_1 > \lambda_2$*, ou seja,* λ_1 *é um autovalor simples;*

iii) $|\lambda_i| \leq \lambda_1$*, para todo* $1 \leq i \leq n$*;*

iv) $\lambda_1 = -\lambda_n$ *se, e somente se, existe uma permutação* ρ *tal que* $M_\rho = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$*.*

Teorema 1.7 ([28])**.** *Seja* M*uma matriz não negativa com raio espectral* $\rho(M)$*, cujas somas das linhas valem* $r_1, r_2, \ldots, r_n$*. Então*

$$\min_{1 \leq i \leq n} r_i \leq \rho(M) \leq \max_{1 \leq i \leq n} r_i.$$

Além disso, se M *é irredutível, então cada uma das igualdades ocorre se, e somente se, as somas de todas as linhas de* M *são iguais.*

1.3 Teoria Espectral dos Grafos

A Teoria Espectral dos Grafos é uma área da Teoria dos Grafos que utiliza-se dos conceitos da Teoria de Matrizes e Álgebra Linear para estudar as propriedades dos grafos. Com a representação matricial podemos tratar os grafos como estruturas algébricas, relacionando as propriedades estruturais do grafo ao espectro das matrizes associadas, ou seja, aos autovalores destas representações matriciais. Estas representações são mais adequadas em aplicações computacionais e métodos matemáticos que auxiliam na busca de novos resultados em Teoria dos Grafos.

Neste sentido, diversas representações matriciais são utilizadas para estudar um grafo, tais como, a matriz de adjacência $A(G)$, a matriz laplaciana $L(G)$ e a matriz laplaciana sem sinal $Q(G)$. Veremos a seguir as definições e alguns dos principais resultados sobre estas matrizes, que nos auxiliarão na compreensão da revisão bibliográfica, bem como na construção dos resultados autorais deste trabalho. As definições desta seção podem ser encontradas em [1] e [17].

Definição 1.51. *Seja $G = (V, E)$ um grafo de ordem n. A matriz de adjacência de G é a matriz quadrada de ordem n, $A(G) = [a_{ij}]$, cujas entradas são dadas por*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{se} \quad v_i v_j \in E, \\ 0, & \textit{caso contrário}. \end{cases}$$

Note que $A(G)$ é real, simétrica e formada por zeros e uns. Portanto, pela Proposição 1.3 todos os autovalores são reais. Quando não houver ambiguidade, denotaremos $A(G)$ somente por A.

Definição 1.52. *O polinômio característico de A, denotado por $P_G(\lambda) = det(A - \lambda I)$ é chamado de polinômio característico do grafo G. Os autovalores de A são chamados autovalores de G. O espectro de G é o espectro de A, ou seja, é o multiconjunto dos autovalores de A dispostos em ordem não crescente, denotado por $Spec_A(G) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$.*

Usualmente, o espectro de A também pode ser representado como $Spec_A(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_s \\ m_a(\lambda_1) & \ldots & m_a(\lambda_s) \end{bmatrix}$, onde são indicadas as respectivas multiplicidades dos s autovalores distintos.

O maior autovalor de G é denominado índice de G.

O espectro de um grafo desconexo é a união dos espectros de suas respectivas componentes [9]. Neste sentido, o Teorema de Perron-Frobenius (Teorema 1.6) garante que o raio espectral é o índice do grafo, pois grafos conexos têm matrizes de adjacência irredutíveis.

A seguir, apresentamos alguns resultados conhecidos sobre os autovalores de G.

Proposição 1.8 ([17]). *Seja λ_1 o índice de um grafo G. Então*

$$\overline{d} \leq \lambda_1 \leq \Delta.$$

Além disso, $\overline{d} = \lambda_1$ se, e somente se, G é regular. Para um grafo conexo G, $\lambda_1 = \Delta$ se, e somente se, G é regular.

Proposição 1.9 ([25]). *Seja G um grafo com n vértices. Então:*

i) $\lambda_n = 0$ *se, e somente se,* $G \cong \overline{K_n}$*;*

ii) $\lambda_n = -1$ *se, e somente se,* G *tem no mínimo uma aresta e cada componente conexa é completa;*

iii) $\lambda_n \leq -\sqrt{2}$*, caso contrário.*

Proposição 1.10 ([15]). *Seja G um grafo conexo. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) G *é um grafo bipartido;*

ii) se λ *é um autovalor de* G *então* $-\lambda$ *também é um autovalor de* G *com a mesma multiplicidade algébrica;*

iii) $\lambda_n = -\lambda_1$*, onde* λ_1 *é o índice de* G*.*

As próximas proposições caracterizam os autovalores dos grafos regulares, cujas demonstrações podem ser encontradas em [1].

Proposição 1.11. *Seja G um grafo regular de grau k. Então:*

i) k *é um autovalor de* G*;*

ii) G *é um grafo conexo se, e somente se, a multiplicidade algébrica de* k *é 1;*

iii) qualquer autovalor λ de G satisfaz $|\lambda| \leq k$.

Proposição 1.12. *Seja G um grafo regular de grau k com n vértices e autovalores $k, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$. Então G e seu grafo complementar $\overline{G}$ possuem os mesmos autovetores e os autovalores de $\overline{G}$ são $n-k-1, -1-\lambda_2, -1-\lambda_3, \ldots, -1-\lambda_n$.*

Definição 1.53. *Seja $D(G) = diag(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n))$ a matriz diagonal dos graus dos vértices do grafo G e seja $A(G)$ a matriz de adjacência de G. Definimos a matriz quadrada de ordem n, $L(G) = D(G) - A(G)$, onde $L(G) = [l_{ij}]$, a matriz laplaciana ou laplaciano do grafo G, cujas entradas são dadas por*

$$l_{ij} = \begin{cases} d(v_i), & \textit{se} \quad i = j, \\ -1, & \textit{se} \quad v_i v_j \in E, \\ 0, & \textit{caso contrário}. \end{cases}$$

Quando não houver ambiguidade, denotaremos $L(G)$ somente por L.

Definição 1.54. *Denotamos por $P_L(\mu) = det(L - \mu I)$ o polinômio característico de L. O espectro de L é o multiconjunto dos autovalores de L dispostos em ordem não crescente, denotado por $Spec_L(G) = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$.*

Usualmente, o espectro de L também pode ser representado como $Spec_L(G) = \begin{bmatrix} \mu_1 & \ldots & \mu_s \\ m_a(\mu_1) & \ldots & m_a(\mu_s) \end{bmatrix}$, onde são indicadas as respectivas multiplicidades algébricas dos s autovalores distintos.

O maior autovalor de L é denominado índice de L ou $L-$índice.

Note que L é simétrica, portanto, pela Proposição 1.3 todos os autovalores são reais. Além disso, L possui todos os seus autovalores não negativos. Esse fato decorre da proposição abaixo.

Proposição 1.13 ([1])**.** *Dado um grafo G, a matriz laplaciana $L(G)$ pode ser escrita como o produto de uma matriz por sua transposta.*

Demonstração. Sejam n e m, respectivamente o número de vértices e de arestas de G. Considere B a matriz de incidência com respeito a uma orientação, construída a partir de uma orientação para as arestas de G. B é uma matriz de ordem $n \times m$, cujas entradas são dadas por

$$B_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{se } v_i \text{ é a terminação positiva de } e_j, \\ -1, & \text{se } v_i \text{ é a terminação negativa de } e_j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por construção, a linha i de B possui $d(v_i)$ elementos não nulos. Fazendo BB^T, temos que os elementos $(BB^T)_{ij}$ são o produto interno entre a linha i e a linha j de B.

Neste caso temos três situações distintas.

Se $i = j$ então $(BB^T)_{ij} = d(v_i)$, pois corresponde a soma das arestas incidentes em v_i. Para $i \neq j$, se $v_iv_j \in E$, então $(BB^T)_{ij} = -1$, pois a aresta que incide positivamente em v_i incide negativamente em v_j e vice versa, se $v_iv_j \notin E$, então $(BB^T)_{ij} = 0$, pois quando multiplicarmos as linhas correspondentes de B teremos no mínimo um valor nulo para cada posição.

Sendo assim, $L = BB^T$. □

A Proposição 1.5 e a Proposição 1.13 garantem que L é positiva semidefinida e pelo Teorema 1.6, o índice laplaciano $\mu_1(G)$ também é o raio espectral laplaciano.

Exemplo 1.17. *Considerando o grafo da Figura 1, sua matriz laplaciana é dada por*

$$L = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

cujo espectro é $Spec_L = \{5, 4, 2, 1, 0\}$.

Um dos principais resultados a respeito do espectro de L é a identificação do número de componentes conexas de G como pode ser visto na proposição abaixo.

Proposição 1.14. *Seja G um grafo com n vértices e sejam $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_n$ os autovalores de $L(G)$. Então:*

i) $\mu_n = 0$ e o vetor $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)^T$ é autovetor associado;

ii) G é conexo se, e somente se, $\mu_{n-1} > 0$;

iii) a multiplicidade algébrica do autovalor 0 *é igual ao número de componentes conexas de* G*;*

iv) se G *é regular de grau* k*, então* $\mu_i = k - \lambda_{n-i+1}$*, onde* λ_i *é autovalor de* $A(G)$*.*

A Proposição 1.15 estabelece uma cota inferior para o índice laplaciano de G.

Proposição 1.15 ([30])**.** *Seja* G *um grafo com no mínimo uma aresta. Então* $\mu_1(G) \geq \Delta(G) + 1$*. Além disso, se* G *é conexo, então a igualdade ocorre se, e somente se,* $\Delta(G) = n - 1$*.*

Nas Proposições 1.16 e 1.17 são apresentadas cotas superiores para os autovalores laplacianos de G.

Proposição 1.16 ([19])**.** *Seja* G *um grafo com conjunto de vértices* $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$*. Então*

$$\mu_1(G) \leq \max_{v_iv_j \in E(G)} \{d(v_i) + d(v_j) - |N_G(v_i) \cap N_G(v_j)|\} = \max_{v_iv_j \in E(G)} \{|N_G(v_i) \cup N_G(v_j)|\}.$$

Proposição 1.17 ([21])**.** *Seja* G *um grafo com mais do que uma aresta e sejam* $\mu_i(G)$ *os autovalores laplacianos de* G*, para* $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$*. Então*

$$\mu_i(G) \leq i - 1 + \min_{U_i} \max\{|N_H(v_k) \cup N_H(v_j)| : v_kv_j \in E(H)\},$$

onde $N_H(v_k)$ *é o conjunto dos vértices vizinhos a* v_k *em* $V(H) = V(G) - U_i$ *e* U_i *é qualquer* $(i-1)$*-subconjunto de* $V(G)$*.*

Definição 1.55 ([27])**.** *O segundo menor autovalor da matriz laplaciana de* G*,* $\mu_{n-1}(G)$*, é chamado de conectividade algébrica do grafo* G*, denotado também por* $\alpha(G)$*.*

A conectividade algébrica está associada a outros invariantes importantes, como por exemplo, conectividade de vértices e de arestas, número isoperimétrico e diâmetro, corte maximal, número independente, dentre outros. Para mais referências sobre o assunto, indicamos [22].

Como vimos na Proposição 1.14, a conectividade algébrica nula indica que o grafo é desconexo.

As Proposições 1.18, 1.19 e 1.20 oferecem algumas cotas superiores e inferiores para a conectividade algébrica.

Proposição 1.18 ([27]). *Seja G um grafo diferente de K_n. Então*

$$\alpha(G) \leq \delta(G).$$

Proposição 1.19 ([27]). *Seja G um grafo com n vértices. Então*

$$\alpha(G) \geq 2\delta(G) - n + 2.$$

Proposição 1.20 ([50]). *Seja G um grafo conexo com n vértices e diâmetro d. Então*

$$\alpha(G) \geq \frac{4}{nd}.$$

Definição 1.56 ([66]). *O spread do laplaciano (laplacian spread) é definido como a diferença entre o maior e o segundo menor autovalores de L, ou seja,*

$$LS(G) = \mu_1(G) - \mu_{n-1}(G).$$

Proposição 1.21 ([67]). *Seja G um grafo de ordem n. Então*

$$LS(G) = LS(\overline{G}) = \mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) - n.$$

Demonstração. Sabendo-se que $\mu_1(G) = n - \mu_{n-1}(\overline{G})$ e $\mu_1(\overline{G}) = n - \mu_{n-1}(G)$ [50], podemos escrever

$$LS(G) = \mu_1(G) - \mu_{n-1}(G) = \mu_1(G) - [n - \mu_1(\overline{G})] = \mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) - n.$$

Por outro lado,

$$LS(\overline{G}) = \mu_1(\overline{G}) - \mu_{n-1}(\overline{G}) = n - \mu_{n-1}(G) - n + \mu_1(G) = \mu_1(G) - \mu_{n-1}(G) = LS(G).$$

□

No Capítulo 2 veremos como o *spread* do laplaciano se relaciona com as desigualdades de Nordhaus-Gaddum e como esta relação contribuiu para o desenvolvimento e aperfeiçoamento de novas cotas para o índice do laplaciano e para a conectividade algébrica.

O Teorema 1.8 exibe a versão do Teorema do Entrelaçamento para os autovalores laplacianos de H, quando $H \subseteq G$.

Teorema 1.8 ([60])**.** *Seja G um grafo de ordem n e H um subgrafo de G de mesma ordem. Então, para todo $1 \leq i \leq n$,*

$$\mu_i(H) \leq \mu_i(G).$$

Definição 1.57. *Definimos a matriz quadrada de ordem n, $Q(G) = D(G) + A(G)$, onde $Q(G) = [s_{ij}]$, a matriz laplaciana sem sinal do grafo G, cujas entradas são dadas por*

$$s_{ij} = \begin{cases} d(v_i), & \textit{se} \quad i = j, \\ 1, & \textit{se} \quad v_i v_j \in E, \\ 0, & \textit{caso contrário}. \end{cases}$$

Note que $Q(G)$ é simétrica, portanto pela Proposição 1.3 todos os autovalores são reais. Quando não houver ambiguidade, denotaremos $Q(G)$ somente por Q.

Definição 1.58. *Denotamos por $P_Q(q) = det(Q - qI)$ o polinômio característico de Q.*

O espectro de Q é o multiconjunto dos autovalores de Q dispostos em ordem não crescente, denotado por $Spec_Q(G) = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$.

Usualmente, o espectro de Q também pode ser representado como $Spec_Q(G) = \begin{bmatrix} q_1 & \ldots & q_s \\ m_a(q_1) & \ldots & m_a(q_s) \end{bmatrix}$, onde são indicadas as respectivas multiplicidades algébricas dos s autovalores distintos.

O maior autovalor de Q é denominado índice de Q ou $Q-$índice.

A matriz laplaciana sem sinal pode ser escrita como $Q(G) = B(G)B(G)^T$, onde $B(G) = [b_{i,j}]$ é a matriz de incidência do grafo G de ordem $n \times m$, cujas entradas são dadas por $b_{i,j} = 1$ se e_j é uma aresta incidente no vértice v_j e $b_{i,j} = 0$, caso contrário.

Desta forma, pela Proposição 1.5, Q é positiva semidefinida, ou seja, todos os seus autovalores são não nulos, consequentemente, $q_1(G)$ é o raio espectral da matriz laplaciana sem sinal.

Outras propriedades desta matriz podem ser encontradas em [14].

Exemplo 1.18. *Considerando o grafo da Figura 1, sua matriz laplaciana sem sinal é dada por*

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

cujo espectro é $Spec_Q = \{5.7784, 2.7108, 2, 1, 0.5107\}$.

A Proposição 1.22 estabelece um resultado importante sobre os autovalores de Q, quando G é bipartido.

Proposição 1.22 ([17]). *Se G é um grafo bipartido. Então $Spec_L(G) = Spec_Q(G)$.*

Para os grafos regulares, a Proposição 1.23 mostra que o espectro da matriz laplaciana sem sinal pode ser determinado tanto do espectro da matriz de adjacência de G como do espectro de sua matriz laplaciana.

Proposição 1.23 ([16]). *Sejam G um grafo regular de grau k, L sua matriz laplaciana e Q sua matriz laplaciana sem sinal. Então*

$$P_G(\lambda) = P_Q(\lambda + k) \qquad \textit{e} \qquad P_L(\mu) = (-1)^n P_Q(2k - \mu).$$

As proposições abaixo trazem algumas cotas paras os autovalores de Q. Para o leitor interessado em mais resultados, sugerimos [23] e [24].

Proposição 1.24 ([16]). *Seja G um grafo de ordem n com sequência não crescente de graus $d(v_1) \leq d(v_2) \leq \ldots \leq d(v_n)$. Então*

$$\min_{v_iv_j \in E(G)} \{d(v_i) + d(v_j)\} \leq q_1(G) \leq \max_{v_iv_j \in E(G)} \{d(v_i) + d(v_j)\}.$$

Proposição 1.25 ([26; 46]). *Para todo grafo G,*

$$q_1(G) \leq \max\{d(v_i) + m(v_i) : v_i \in V(G)\},$$

onde $m(v_i) = \frac{1}{d(v_i)} \sum_{v_j \in N(v_i)} d(v_j)$.

Se G é conexo, então a igualdade ocorre se, e somente se, G é regular ou bipartido semiregular.

2 Revisão da literatura

O número cromático de um grafo $\chi(G)$ é um importante invariante relacionado ao histórico problema das quatro cores, proposto por Francis Guthrie (1831-1899) em 1852 [8]. Até a década de 50 a maioria dos estudos sobre este invariante consideravam apenas o grafo G. No entanto, em 1956 os pesquisadores Edward A. Nordhaus (1912-1998) e Jerry W. Gaddum (1924-1964) [54] estudaram o número cromático do grafo G juntamente com o número cromático de seu complementar $\overline{G}$, encontrando cotas superiores e inferiores para a soma e o produto de $\chi(G)$ e $\chi(\overline{G})$. O Teorema 2.1 apresenta a relação encontrada por Nordhaus e Gaddum [54].

Teorema 2.1 ([54])**.** *Seja G um grafo de ordem n. Então*

$$2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n+1 \quad \textit{e} \quad n \leq \chi(G)\chi(\overline{G}) \leq \frac{(n+1)^2}{4}.$$

Desde então, qualquer cota superior ou inferior para a soma ou produto de um invariante de G e o mesmo invariante em seu grafo complementar $\overline{G}$ é conhecida como uma relação de Nordhaus-Gaddum.

Definição 2.1. *Um invariante espectral é um parâmetro do grafo definido usando os autovalores de uma ou mais matrizes associadas ao grafo.*

Neste trabalho nos concentraremos nas relações de Nordhau-Gaddum envolvendo os invariantes espectrais, mais precisamente aquelas relacionadas aos autovalores das matrizes laplaciana e laplaciana sem sinal. Para tanto, neste capítulo apresentamos uma revisão bibliográfica sobre as relações de Nordhaus-Gaddum para invariantes espectrais já existentes na literatura.

2.1 Matriz de adjacência

Inciamos com os resultados já provados para a matriz de adjacência, haja vista a relação direta entre esta matriz e as matrizes laplaciana e laplaciana sem sinal. O primeiro resultado conhecido por relações de Nordhaus-Gaddum para invariantes espectrais foi estabelecido, independentemente, por Nosal em 1970 [55] e Amin e Hakimi em 1972 [3].

Teorema 2.2 ([3; 55]). *Seja G um grafo de ordem n. Então*

$$n-1 \leq \lambda_1(G) + \lambda_1(\overline{G}) \leq \sqrt{2}(n-1).$$

Nikiforov [51; 52] e Nikiforov e Yuan [53] estudaram as relações de Nordhaus-Gaddum para a matriz A de forma geral, a partir do seguinte problema:

$$f_k(n) = \max_{|V(G)|=n} |\lambda_k(G)| + |\lambda_k(\overline{G})|,$$

para um dado inteiro k, onde $1 \leq k \leq n$.

Dentre as diversas desigualdades estudadas, o Teorema 2.3 apresenta cotas para os índices da matriz de adjacência de G e de $\overline{G}$, cuja cota inferior foi provada em [51] e a cota superior em [58].

Teorema 2.3 ([51; 58]). *Seja G um grafo de ordem n. Então*

$$\frac{4n}{3} - 2 \leq f_1(n) \leq \frac{4n}{3} - 1.$$

Nikiforov e Yuan [53] apresentam cotas superiores de Nordhaus-Gaddum para os autovalores da matriz de adjacência de G e de $\overline{G}$, como pode ser vistos nos Teoremas 2.4 e 2.5.

Teorema 2.4 ([53]). *Seja G um grafo de ordem $n \geq 15(s-1)$, onde $s \geq 2$. Então*

$$|\lambda_s(G)| + |\lambda_s(\overline{G})| \leq \frac{n}{\sqrt{2(s-1)}} - 1.$$

Teorema 2.5 ([53]). *Seja G um grafo de ordem $n \geq 4^s$, onde $s \geq 1$. Então*

$$|\lambda_{n-s+1}(G)| + |\lambda_{n-s+1}(\overline{G})| \leq \frac{n}{\sqrt{2s}} + 1.$$

E todos os limites acima são os melhores possíveis quando $s = 2^k + 1$ e n é suficientemente grande.

2.2 Matriz laplaciana

As desigualdades de Nordhaus-Gaddum para a matriz laplaciana têm sido as mais estudadas nos últimos anos, mais precisamente, aquelas envolvendo o maior e o

segundo menor autovalor. Estes autovalores desempenham papel relevante em diversas aplicações, além disso, a relação direta entre o segundo menor autovalor (conectividade algébrica) e o maior autovalor do grafo complementar tornam as relações de Nordhaus-Gaddum mais interessantes.

2.2.1 Cotas para $\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G})$

Nesta seção, abordaremos todas as desigualdades existentes para a soma $\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G})$. As desigualdades envolvendo este autovalor despertam bastante interesse dos pesquisadores, haja vista suas aplicações em diversas ciências, tais como, química, biologia e engenharia [63]. Além disso, a obtenção de cotas inferiores e superiores envolvendo o índice laplaciano de G e de $\overline{G}$ tem ampla utilização na aceleração de algoritmos e heurísticas para a determinação de invariantes combinatórios de grafos, bem como no estudo de grafos extremais.

Antes de apresentarmos os resultados da revisão bibliográfica chamamos atenção para a equivalência entre qualquer cota inferior ou superior de Nordhaus-Gaddum para $\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G})$ e $\alpha(G) + \alpha(\overline{G})$, bem como a equivalência entre estas e o *spread* do laplaciano.

Teorema 2.6. *Seja G um grafo de ordem n e sejam θ_1 e θ_2 funções dadas em termos da ordem e/ou outro invariante de G. Então as seguintes inequações são equivalentes:*

i) $\theta_1 \leq \mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq \theta_2$*;*

ii) $2n - \theta_2 \leq \alpha(G) + \alpha(\overline{G}) \leq 2n - \theta_1$*;*

iii) $\theta_1 - n \leq \mu_1(G) - \alpha(G) \leq \theta_2 - n$ *;*

iv) $\theta_1 - n \leq \mu_1(\overline{G}) - \alpha(\overline{G}) \leq \theta_2 - n$.

Demonstração. Basta utilizar as seguintes relações entre os autovalores de G e $\overline{G}$, $\mu_1(G) = n - \alpha(\overline{G})$ e $\mu_1(\overline{G}) = n - \alpha(G)$ e reescrever as inequações. □

Depreende-se do Teorema 2.6 que todas as cotas de Nordhaus-Gaddum para $\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G})$ apresentadas ao longo desta seção podem ser convertidas em cotas de Nordhaus-Gaddum para $\alpha(G) + \alpha(\overline{G})$.

A partir da bem conhecida relação $\mu_1(G) \leq 2\Delta$ [4], a cota inferior de Nordhaus-Gaddum mais simples para o raio espectral foi apresentada primeiramente por Liu *et al.* [40].

Teorema 2.7 ([40]). *Seja G é um grafo de ordem n, com grau máximo Δ e grau mínimo δ. Então*

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq 2\Delta + 2(n - 1 - \delta) = 2(n - 1) + 2(\Delta - \delta).$$

Em particular, se G e $\overline{G}$ são conexos e não regulares, Shi [56] apresentou um limite melhor do que o da desigualdade acima.

Teorema 2.8 ([56]). *Sejam G e $\overline{G}$ grafos conexos e não regulares com n vértices. Então*

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq 2\left[n - 1 - \frac{2}{2n^2 - n}\right] + 2(\Delta - \delta).$$

Outros limites superiores envolvendo o número de vértices, o grau máximo e o grau mínimo são descritos a seguir.

Teorema 2.9 ([40]). *Seja G um grafo. Então*

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq n - 2 + \sqrt{(\Delta + \delta + 1 - n)^2 + n^2 + 4(\Delta - \delta)(n - 1)}.$$

Teorema 2.10 ([56]). *Seja G um grafo de ordem n, com $0 < \delta \leq \Delta < n - 1$. Então*

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq 2\sqrt{2(n - 1)^2 - 3\delta(n - 1) + (\Delta + \delta)^2 - \Delta + \delta}.$$

Além disso, se G e $\overline{G}$ são conexos este limite é estrito.

Teorema 2.11 ([64]). *Seja G um grafo com n vértices, $\Delta = d(u)$, $\delta = d(v)$ e sejam Δ' e δ', respectivamente, o grau do vértice de maior e de menor grau do conjunto $V - \{u\}$ e $V - \{v\}$. Então*

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq \frac{n - \Delta + \delta - 3 + \sqrt{2}\big[(\delta - 1)^2 + 4(\Delta^2 + (\Delta')^2) + \\ \frac{8(n - 1)(\Delta - \delta + 1) + (n - \Delta - 2)^2 + 4(\Delta^c)^2 + 4(\overline{\Delta}^c)^2\big]^{\frac{1}{2}}}{2},$$

onde $\Delta^c = n - \delta - 1$ e $\overline{\Delta}^c = n - \delta' - 1$. A igualdade ocorre se, e somente se, G e $\overline{G}$ são bipartidos regulares.

No mesmo artigo, Wang *et al.* [64] apresentam mais uma cota superior.

Teorema 2.12 ([64]). *Seja G um grafo com n vértices, $\Delta = d(u)$ e Δ' o grau máximo do subgrafo de G obtido pela remoção do vértice u. Então*

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq \frac{2n - \Delta + \Delta' - 4 + \sqrt{2}\big[(\Delta' + \delta - 1)^2 + 4(\Delta^2 - \Delta.\Delta') + 8(n-1)(\Delta - \delta + 1) + (2n - \Delta - \delta - 3)^2\big]^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, G e $\overline{G}$ são bipartidos regulares.

Teorema 2.13 ([63]). *Seja G um grafo com n vértices. Então*

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq \frac{5n - \Delta + \delta - 9 + \sqrt{2}\big[2(2\Delta - \delta - 2)^2 + 8\delta(2 + \delta) + (\omega - \Delta)(n + 3\Delta - 3\delta - 5) + 32n\omega - 8\phi(3n + \Delta - 1)\big]^{\frac{1}{2}}}{4},$$

onde $\omega = n - \delta - 1$ e $\phi = n - \Delta - 1$. Além disso, se G e $\overline{G}$ são conexos, então este limite é estrito.

Conforme visto na Proposição 1.21, o *spread do laplaciano*, $LS(G)$, e a soma do índice do laplaciano de G e de $\overline{G}$ estão relacionados diretamente. Neste sentido, as desigualdades de Nordhaus-Gaddum para estes autovalores tiveram grande desenvolvimento.

Utilizando a Proposição 1.21 e o fato de que $LS(G) < n$, You e Liu [67] apresentaram no Teorema 2.14 um limite melhor do que os conhecidos até então, envolvendo apenas o número de vértices do grafo.

Teorema 2.14 ([67]). *Seja G um grafo de ordem n. Então*

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) < 2n.$$

Neste contexto, os principais resultados sobre as relações de Nordhaus-Gaddum para a soma dos índices do laplaciano de G e de $\overline{G}$ giram em torno da conjectura proposta por Zhai *et al.* [68] em 2011 para o *spread* do laplaciano e que aparece como uma questão proposta por You e Liu [67] em 2012. A seguir, apresentamos a versão desta conjectura como uma relação de Nordhaus-Gaddum.

Conjectura 2.1 ([67; 68]). *Seja G um grafo com n vértices. Então*

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq 2n - 1.$$

A igualdade é alcançada se, e somente se, G ou $\overline{G}$ é isomorfo ao join de K_1 e um grafo desconexo de ordem $n-1$.

Até o momento, a Conjectura 2.1 foi provada para árvores [66], grafos unicíclicos [7], bicíclicos [42], tricíclicos [13], grafos cactus [41], quase-árvores [65], grafos bipartidos [6], grafos desconexos [68], grafos com diâmetro diferente de 3 [68], grafos quase-regulares [12] e grafos livres de K_3 [12].

Recentemente, Afshari *et al.* [2] mostraram que $\alpha(G)+\alpha(\overline{G}) \geq \frac{2}{5}$. Essa cota pode ser transformada imediatamente em uma cota de Nordhaus-Gaddum para $\mu_1(G)+\mu_1(\overline{G})$, como vimos no Teorema 2.6. Por conveniência, apresentamos a sua versão para o raio espectral.

Teorema 2.15 ([2]). *Seja G um grafo de ordem $n \geq 2$. Então*

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq 2n - \frac{2}{5}.$$

Dentre os resultados sobre a Conjectura 2.1, destacamos um dos mais recentes, que foi estabelecido em 2016 pelos pesquisadores Chen e Das [12] para grafos cuja a diferença entre o grau máximo e o grau mínimo não exceda $\sqrt{n-3+\frac{2}{n}}$.

Teorema 2.16 ([12]). *Seja G um grafo de ordem $n \geq 5$, tal que $\Delta(G)-\delta(G) \leq \sqrt{n-3+\frac{2}{n}}$. Então*

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq 2n - 1.$$

No Capítulo 3 veremos que os nossos resultados autorais ampliam o de Chen e Das para uma classe maior de grafos, provando que a Conjectura 2.1 é satisfeita quando $\Delta(G) - \delta(G)$ é uma função linear de n.

Quanto aos limites inferiores, esta pesquisa não localizou artigos que tratassem diretamente de relações de Nordhaus-Gaddum. Embora escassos, os únicos artigos encontrados tratavam de cotas inferiores para o *spread* do laplaciano, no entanto, como vimos na Proposição 1.21, tais cotas são facilmente reescritas como relações de Nordhaus-Gaddum.

Em 2012, You e Liu [67] apresentaram dois teoremas sobre cotas inferiores para a soma dos índices do laplaciano de G e de seu complementar $\overline{G}$, no entanto, aqueles autores não caracterizaram os grafos que atingem a igualdade. Apenas em 2016, Chen e Das [12] obtiveram esta caracterização como vemos no Teorema 2.17.

Teorema 2.17 ([12; 67]). *Seja G um grafo conexo com $n \geq 2$ vértices e m arestas. Então*

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \geq n + \frac{2}{n-1}\sqrt{(n-1)(M_1(G) + 2m) - 4m^2},$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se, $G \cong K_n$ ou G é um grafo conexo com exatamente dois autovalores laplacianos não nulos e distintos com a mesma multiplicidade.

A quantidade M_1 é um famoso índice topológico da química matemática, chamado de primeiro índice de Zagreb [31], definido por

$$M_1(G) = \sum_{v_i \in V(G)} d(v_i)^2.$$

O Teorema 2.18 apresenta uma cota inferior dependendo apenas da ordem do grafo G.

Teorema 2.18 ([12; 67]). *Seja G um grafo conexo, não completo, de ordem $n \geq 3$. Então*

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \geq n + 2,$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, $G = \overline{(sK_2) \cup (n-2s)K_1}$, onde $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

2.2.2 Cotas para $\mu_1(G)\mu_1(\overline{G})$

As relações de Nordhaus-Gaddum para o produto do índice do laplaciano de G e de seu complementar $\overline{G}$ são mais raras. Os únicos resultados encontrados nesta pesquisa foram para a cota superior. Em 2014, Ashraf e Tayfeh-Rezaie [6] obtiveram uma cota para grafos bipartidos, como pode ser visto no Teorema 2.19.

Teorema 2.19 ([6]). *Seja G um grafo bipartido com n vértices. Então*

$$\mu_1(G)\mu_1(\overline{G}) \leq n(n-1).$$

A igualdade ocorre se, e somente se, G ou $\overline{G}$ é uma estrela.

A partir deste resultado, Ashraf e Tayfeh-Rezaie [6] propuseram a Conjectura 2.2, que ainda permanece em aberto.

Conjectura 2.2 ([6]). *Seja G um grafo com n vértices. Então*

$$\mu_1(G)\mu_1(\overline{G}) \leq n(n-1).$$

A igualdade ocorre se, e somente se, G ou $\overline{G}$ é isomorfo ao join de K_1 e um grafo desconexo de ordem $n-1$.

Como uma das contribuições originais do nosso trabalho, no Capítulo 3 provaremos que a Conjectura 2.2 também é válida para grafos regulares.

2.3 Matriz laplaciana sem sinal

Estudos indicam que esta matriz parece descrever de forma mais adequada as propriedades estruturais dos grafos, sendo assim, a obtenção de cotas envolvendo os seus autovalores se mostra importante para as pesquisas em Teoria Espectral dos Grafos [16].

2.3.1 Cotas para $q_1(G) + q_1(\overline{G})$

Como Q é uma matriz não negativa, a partir da aplicação do Teorema 1.7, Anderson e Morley [4] mostraram que $q_1(G) \leq 2\Delta$, o que implica facilmente na cota superior de Nordhaus-Gaddum mais simples, apresentada em [40].

Teorema 2.20 ([40]). *Seja G um grafo de ordem n com grau máximo $\Delta(G)$ e grau mínimo $\delta(G)$. Então*

$$q_1(G) + q_1(\overline{G}) \leq 2(n-1) + 2(\Delta - \delta),$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, G é regular.

Em [39] foram determinadas cotas inferiores e superiores envolvendo a ordem, o grau máximo e o grau mínimo de G.

Teorema 2.21 ([39]). *Seja G um grafo simples com n vértices e m arestas, onde $0 < m < \frac{n(n-1)}{2}$ e $0 < \delta \leq \Delta < n-1$. Então*

$$2\sqrt{2(n-1)^2 - 4\Delta(n-1) + (\Delta+\delta)^2 - \delta + \Delta} \leq q_1(G) + q_1(\overline{G}) \leq 2\sqrt{2(n-1)^2 - 4\delta(n-1) + (\Delta+\delta)^2 - \Delta + \delta}.$$

Se G e $\overline{G}$ são conexos, a igualdade é atingida se, e somente se, G é $\frac{n-1}{2}$-regular.

O Teorema 1.5 garante que $2\lambda_1(G) \leq q_1(G)$. A partir desta relação e do Teorema 2.2, Gutman *et al.* [32] demonstraram o seguinte resultado para a cota inferior, envolvendo apenas a ordem do grafo.

Teorema 2.22 ([32]). *Seja G um grafo simples de ordem n. Então*

$$q_1(G) + q_1(\overline{G}) \geq 2n - 2.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, G é um grafo regular.

Em 2013, Aouchiche e Hansen [5] conjecturaram que $q_1(G) + q_1(\overline{G}) \leq 3n - 4$. Este resultado foi provado por Ashraf e Tayfeh-Rezaie em 2014 [6], como podemos ver no Teorema 2.23.

Teorema 2.23 ([6]). *Seja G um grafo de ordem n. Então*

$$q_1(G) + q_1(\overline{G}) \leq 3n - 4.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $G \cong K_{1,n-1}$.

Neste mesmo artigo, Ashraf e Tayfeh-Rezaie [6] apresentaram uma nova cota superior e provaram que esta cota é melhor do que aquela obtida no Teorema 2.23.

Teorema 2.24 ([6]). *Seja G um grafo com $n \geq 2$ vértices. Então*

$$q_1(G) + q_1(\overline{G}) \leq 2n - 2 + (\Delta - \delta)\Big(2 - \frac{\Delta - \delta + 1}{n-1}\Big).$$

A igualdade ocorre se, e somente se, G é regular ou $G \cong K_{1,n-1}$.

2.3.2 Cotas para $q_1(G)q_1(\overline{G})$

Assim como no caso dos autovalores da matriz laplaciana, as relações de Nordhaus-Gaddum para o produto dos Q-índices de G e de $\overline{G}$ são raras. O único resultado encontrado nesta pesquisa foi a Conjectura 2.3, proposta em 2013 por Aouchiche e Hansen [5], apresentando uma cota superior para este produto.

Conjectura 2.3 ([5])**.** *Seja G um grafo de ordem $n \geq 2$. Então*

$$q_1(G)q_1(\overline{G}) \leq 2n(n-2),$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, G é a estrela $K_{1,n-1}$.

No entanto, Ashraf e Tayfeh-Rezaie [6] refutaram esta Conjectura em 2014, apresentando uma família de grafos $H_n = \overline{K_{n-k}} \vee K_k$, onde $n = 6k + s$ para algum inteiro k e $-3 \leq s \leq 2$, tal que, $q_1(H_n)q_1(\overline{H_n}) > 2n(n-2)$.

Observe que a família de grafos H_n é justamente a família dos grafos split completos $SC_{n,k}$, onde $n = 6k + s$ para algum inteiro k e $-3 \leq s \leq 2$.

Exemplo 2.1. *Na Figura 17 temos o grafo $H_{10} = \overline{K_8} \vee K_2 \cong SC_{10,2}$. Neste caso, $q_1(H_{10})q_1(\overline{H_{10}}) = 11,6569 \times 14 \approx 163 > 160 = 2 \times 10 \times 8$.*

$SC_{10,2}$

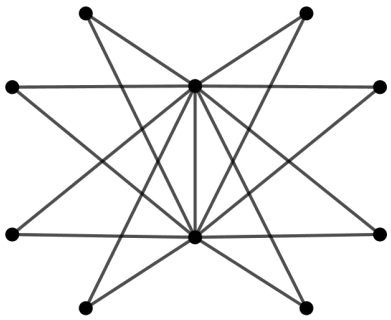


Figura 17: Grafo $\overline{K_8} \vee K_2 \cong SC_{10,2}$

3 Relações de Nordhaus-Gaddum para $\mu_1(G)$

Neste capítulo nos dedicamos ao estudo das cotas de Nordhaus-Gaddum para $\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G})$ e $\mu_1(G)\mu_1(\overline{G})$. Nossos resultados autorais apresentam provas parciais das Conjecturas 2.1 e 2.2.

3.1 Uma prova parcial da Conjectura 2.1

O Teorema desta seção mostra que a Conjectura 2.1, apresentada em [67] e [68], é válida para grafos regulares. Em especial, provamos que a Conjectura 2.1 é satisfeita para grafos cuja diferença entre o grau máximo $\Delta(G)$ e o grau mínimo $\delta(G)$ não exceda $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)n - 1$, ou seja, $\Delta(G) - \delta(G) \leq \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)n - 1$. Consequentemente, ampliamos o resultado Teorema 2.16.

Antes de demonstrar o resultado do Teorema 3.1 precisamos dos seguintes lemas:

Lema 3.1 ([52]). *Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ os autovalores de um grafo G de ordem $n \geq \binom{2k-1}{k-1}$. Então*

$$\lambda_k(G) \geq -1 \quad \textit{e} \quad \lambda_{n-k+1}(G) \leq 0.$$

O Lema a seguir é um corolário do Teorema 2.5 e oferece uma cota superior de Nordhaus-Gaddum para a soma do menor autovalor do grafo G e de seu complementar $\overline{G}$. Este Lema é crucial na demonstração do Teorema 3.1.

Lema 3.2 ([53]). *Seja G um grafo de ordem $n \geq 4$. Então*

$$|\lambda_n(G)| + |\lambda_n(\overline{G})| \leq \frac{\sqrt{2}n}{2} + 1.$$

Teorema 3.1. *Seja G um grafo de ordem $n \geq 4$, tal que, $\Delta(G) - \delta(G) \leq \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) n - 1$. Então*

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq 2n - 1.$$

Demonstração. A partir da definição de que $L(G) = D(G) - A(G)$ e aplicando o item $ii)$ do Teorema 1.5 para $M = D(G)$ e $N = -A(G)$ e $M = D(\overline{G})$ e $N = -A(\overline{G})$, temos que

$$\mu_1(G) \leq \lambda_1(D) + \lambda_1(-A) = \Delta + \lambda_1(-A), \tag{3.1}$$

$$\mu_1(\overline{G}) \leq \lambda_1(\overline{D}) + \lambda_1(-\overline{A}) = \overline{\Delta} + \lambda_1(-\overline{A}). \tag{3.2}$$

Como A é simétrica e real e $n \geq 4$, pelos Lemas 1.1 e 3.1, podemos escrever

$$\lambda_1(-A) = -\lambda_n(A) = -\lambda_n(G) = |\lambda_n(G)| \quad \text{e} \quad \lambda_1(-\overline{A}) = -\lambda_n(\overline{A}) = -\lambda_n(\overline{G}) = |\lambda_n(\overline{G})|.$$

Sabendo-se que $\overline{\Delta} = n-1-\delta(G)$ e somando as equações (3.1) e (3.2), obtemos que

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq n - 1 + \Delta(G) - \delta(G) + |\lambda_n(G)| + |\lambda_n(\overline{G})|. \tag{3.3}$$

Aplicando a cota do Lema 3.2 à equação (3.3) temos a seguinte cota superior de Nordhaus-Gaddum:

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq n - 1 + \Delta(G) - \delta(G) + \frac{\sqrt{2}n}{2} + 1 \leq \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)n + \Delta(G) - \delta(G). \tag{3.4}$$

Observe que

$$\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)n + \Delta(G) - \delta(G) \leq 2n - 1 \iff \Delta(G) - \delta(G) \leq \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)n - 1.$$

Portanto, a Conjectura 2.1 é verdadeira para grafos cuja diferença entre $\Delta(G)$ e $\delta(G)$ não exceda $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)n - 1$. □

Como Corolário do Teorema 3.1, apresentamos uma prova da Conjectura 2.1 para grafos regulares.

Corolário 3.1. *Seja G um grafo regular de grau k, com $n \geq 2$ vértices. Então*

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq 2n - 1.$$

Demonstração. Se $n = 2$ ou $n = 3$, então $G \cong K_2$ ou $G \cong K_3$ e nestes casos $\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) = n$.

Seja $n \geq 4$. Notemos que se G é k-regular então $\Delta(G) = \delta(G) = k$. Portanto,

podemos reescrever a equação (3.4) como

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq \frac{2+\sqrt{2}}{2}n \leq 2n - 1.$$

□

3.1.1 Comparação entre os Teoremas 2.16 e 3.1

Seja G um grafo com n vértices. Considere as funções $f_1(n) = \sqrt{n-3+\frac{2}{n}}$ e $f_2(n) = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)n - 1$.

Chen e Das [12] provaram através do Teorema 2.16 que a Conjectura 2.1 é verdadeira quando $\Delta(G) - \delta(G) \leq f_1(n)$, no entanto, no Teorema 3.1 conseguimos provar que a Conjectura 2.1 é satisfeita para $\Delta(G) - \delta(G) \leq f_2(n)$.

Vamos mostrar que o resultado do Teorema 3.1 amplia o número de grafos para os quais a Conjectura 2.1 está provada a partir de um dado n.

Defina

$$f(n) := f_2(n) - f_1(n) = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)n - 1 - \sqrt{n-3+\frac{2}{n}}.$$

Calculando a primeira derivada de $f(n)$, obtemos

$$f'(n) = f_2'(n) - f_1'(n) = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{1-\frac{2}{n^2}}{2\sqrt{n-3+\frac{2}{n}}}\right).$$

Note que $f'(n)$ é contínua e positiva $\forall n \in [6, +\infty)$, logo, $f(n)$ é crescente para $\forall n \in [6, +\infty)$.

Além disso, se $n = 16$, então

$$f(16) = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)16 - 1 - \sqrt{16-3+\frac{2}{16}} = 0,06.$$

Como $f(n)$ é crescente, conclui-se que $f(n)$ é positiva $\forall n \in [16, +\infty)$. Portanto, para todo $n \geq 16$, $f_2(n) > f_1(n)$. Isso implica que o resultado do Teorema 3.1 garante que a Conjectura 2.1 é válida para um maior número de grafos do que é possível provar pelo Teorema 2.16.

Em particular, observe que quando $n = 1000$, a Conjectura 2.1 está provada,

de acordo com o Teorema 2.16, para grafos com $\Delta(G) - \delta(G) \leq f_1(1000) \approx 31$. Por outro lado, o Teorema 3.1 garante que a Conjectura 2.1 é satisfeita para grafos com $\Delta(G) - \delta(G) \leq f_2(1000) \approx 291$.

As soluções parciais encontradas na literatura trazem indícios de que a Conjectura 2.1 deve vir a ser confirmada. De fato, depreende-se da revisão bibliográfica e dos resultados apresentados no Teorema 3.1 que para prová-la é suficiente demonstrá-la para somente um dos seguintes casos abaixo:

i) grafos conexos [6; 68];

ii) grafos com diâmetro $d(G) = 3$ [68];

iii) grafos com $n + 3 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2} - (n + 3)$ [6; 7; 13; 42; 66];

iv) grafos com $(n + 1)/2 < \Delta(G) \leq n - 2$, $1 \leq \delta(G) \leq (n - 1)/2$ e $\Delta(G) - \delta(G) > \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)n - 1$ [Corolários 3.6 e 3.7 de [12] e Teorema 3.1];

v) grafos contendo K_3 [12].

3.2 Uma prova parcial da Conjectura 2.2

Em 2014, Ashraf e Tayfeh-Rezaie [6] conjecturaram que $\mu_1(G)\mu_1(\overline{G}) \leq n(n - 1)$ (Conjectura 2.2) e provaram que esta conjectura é verdadeira para grafos bipartidos. Nesta seção, demonstramos que a Conjectura 2.2 é satisfeita para a classe dos grafos regulares. Deste modo, contribuímos com as escassas relações de Nordhaus-Gaddum para o produto dos índices de G e de seu complementar $\overline{G}$.

Antes de iniciar a demonstração, apresentamos no Lema 3.3 um famoso resultado algébrico conhecido como desigualdade da médias aritmética e geométrica em sua versão mais simples com duas variáveis.

Lema 3.3 ([38]). *Sejam x e $y \in \mathbb{R}^+$. Então*

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2}.$$

Demonstração. Como x e y são não negativos, temos $0 \leq (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$. Somando $4xy$ em ambos os lados, então $4xy \leq x^2 + 2xy + y^2$. Reagrupando temos $4xy \leq (x + y)^2$. Logo $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$. □

Teorema 3.2. *Seja G um grafo regular de grau k, com $n \geq 2$ vértices. Então*

$$\mu_1(G)\mu_1(\overline{G}) \leq n(n-1).$$

Demonstração. Se $n = 2$ ou $n = 3$, então $G \cong K_n$ e $\mu_1(G)\mu_1(\overline{G}) = 0$. Se $n \geq 4$, pelo Corolário 3.1,

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)n. \tag{3.5}$$

Como $\mu_1(G)$ e $\mu_1(\overline{G})$ são não negativos, podemos aplicar a desigualdade da média aritmética e geométrica (Lema 3.3), obtendo

$$\mu_1(G)\mu_1(\overline{G}) \leq \left(\frac{\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G})}{2}\right)^2. \tag{3.6}$$

Utilizando a inequação (3.5) em (3.6), temos

$$\mu_1(G)\mu_1(\overline{G}) \leq \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}n\right)^2 = \left(\frac{3+2\sqrt{2}}{8}\right)n^2. \tag{3.7}$$

Para provar o Teorema é suficiente mostrar que $\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{8}\right)n^2 \leq n(n-1)$.

Defina

$$g(n) := \left(\frac{3+2\sqrt{2}}{8} - 1\right)n^2 + n.$$

Calculando a primeira derivada de $g(n)$, obtemos

$$g'(n) = \left(\frac{2\sqrt{2}-5}{4}\right)n + 1.$$

Note que $g'(n)$ é contínua e negativa $\forall n \in [2, +\infty)$, portanto, $g(n)$ é decrescente $\forall n \in [2, +\infty)$. Além disso, se $n = 4$, então

$$g(4) = \left(\frac{3+2\sqrt{2}}{8} - 1\right)4^2 + 4 = -0,34.$$

Como $g(n)$ é decrescente, conclui-se que $g(n)$ é negativa $\forall n \in [4, +\infty)$. Portanto,

$$\mu_1(G)\mu_1(\overline{G}) \leq n(n-1).$$

□

4 Relações de Nordhaus-Gaddum para $\mu_2(G)$

Não encontramos na literatura relações de Nordhaus-Gaddum para os demais autovalores da matriz laplaciana, portanto, como uma de nossas contribuições originais, dedicamos este capítulo a construção de novas cotas inferiores e superiores para $\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G})$. Desenvolvemos uma nova cota inferior e duas novas cotas superiores, além disso, propusemos uma conjectura para estudos futuros.

4.1 Uma nova cota inferior

Nesta seção obtemos uma cota inferior de Nordhaus-Gaddum para $\mu_2(G)+\mu_2(\overline{G})$ e provamos que esta é a melhor possível através da apresentação dos grafos extremais. Mais uma vez utilizamos os resultados do Teorema de Weyl para desenvolvê-la. Preliminarmente, apresentamos alguns lemas que nos serão úteis.

Lema 4.1 ([17]). *Para todo grafo G com n vértices, $\mu_i(G) = n - \mu_{n-i}(\overline{G})$, onde $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.*

Os Lemas 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5 caracterizam os grafos conexos com no máximo três autovalores distintos e não nulos.

Lema 4.2 ([20; 70]). *Seja G um grafo conexo de ordem n com no mínimo uma aresta. Então $\mu_1(G) = \mu_2(G) = \ldots = \mu_{n-1}(G) = n$ se, e somente se, $G \cong K_n$.*

Lema 4.3 ([67]). *Seja G um grafo conexo de ordem $n \geq 3$. Então $\mu_1(G) = \mu_2(G) = \ldots = \mu_{n-2}(G) > \mu_{n-1}(G)$ se, e somente se, $G \cong K_n - e$, onde e é qualquer aresta de G.*

Lema 4.4 ([20; 67]). *Seja G um grafo conexo de ordem $n \geq 3$. Então $\mu_1(G) > \mu_2(G) = \ldots = \mu_{n-2}(G) = \mu_{n-1}(G)$ se, e somente se, $G \cong K_{1,n-1}$ ou $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$.*

Lema 4.5 ([12; 49]). *Seja G um grafo conexo de ordem $n \geq 5$. Então $\mu_1(G) > \mu_2(G) = \ldots = \mu_{n-2}(G) > \mu_{n-1}(G)$ se, e somente se, $G \cong K_{n-1} + e$, $G \cong K_1 \vee 2K_{\frac{n-1}{2}}$, $G \cong \overline{K_{\frac{n}{3}}} \vee 2K_{\frac{n}{3}}$ ou $G \cong \mathcal{G}(r, \frac{n}{2} - r)$, para $1 \leq r < \frac{n}{2}$.*

Observe que $\mathcal{G}(r, \frac{n}{2} - r)$ é o H-$join$ de $K_r, \overline{K_{\frac{n}{2}-r}}, \overline{K_{\frac{n}{2}-r}}, K_r$, onde $H \cong P_4$ e $s = \frac{n}{2} - r$, apresentado na Definição 1.30.

Teorema 4.1. *Seja G um grafo de ordem $n \geq 3$. Então*

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \geq n,$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, $G \cong K_n$, $G \cong K_n - e$, $G \cong K_{1,n-1}$, $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$, $G \cong K_{n-1} + e$, $G \cong K_1 \vee 2K_{\frac{n-1}{2}}$, $G \cong \overline{K_{\frac{n}{3}}} \vee 2K_{\frac{n}{3}}$ *ou* $G \cong \mathcal{G}(r, \frac{n}{2} - r)$, *onde* $1 \leq r < \frac{n}{2}$.

Demonstração. Se $n = 3$ é fácil ver que $\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \geq n$ e a igualdade ocorre se, e somente se, $G \cong K_3$.

Seja $n \geq 4$. Sabendo-se que $L(G) + L(\overline{G}) = L(K_n)$, podemos utilizar o item $ii)$ do Teorema 1.5 para $M = L(G)$ e $N = L(\overline{G})$ juntamente com o Lema 4.2 e obter

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \geq \mu_3(K_n) = n.$$

É bem conhecido que G e $\overline{G}$ não podem ser ambos desconexos, portanto, assumimos sem perda de generalidade que G é conexo.

Observe que pelo Lema 4.1 $\mu_2(\overline{G}) = n - \mu_{n-2}(G)$, portanto, $\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) = n$ se, e somente se, $\mu_2(G) = \mu_{n-2}(G)$. Logo, G tem no máximo três autovalores distintos e não nulos e basta considerar os seguintes quatro casos:

Caso 1. $\mu_1(G) = \mu_2(G) = \mu_{n-2}(G) = \mu_{n-1}(G)$. Neste caso, pelo Lema 4.2, teremos $\mu_1(G) = \mu_2(G) = \ldots = \mu_{n-2}(G) = \mu_{n-1}(G)$ se, e somente se, $G \cong K_n$.

Caso 2. $\mu_1(G) = \mu_2(G) = \mu_{n-2}(G) > \mu_{n-1}(G)$. Neste caso, pelo Lema 4.3, teremos $\mu_1(G) = \mu_2(G) = \ldots = \mu_{n-2}(G) > \mu_{n-1}(G)$ se, e somente se, $G \cong K_n - e$.

Caso 3. $\mu_1(G) > \mu_2(G) = \mu_{n-2}(G) = \mu_{n-1}(G)$. Neste caso, pelo Lema 4.4, teremos $\mu_1(G) > \mu_2(G) = \ldots = \mu_{n-2}(G) = \mu_{n-1}(G)$ se, e somente se, $G \cong K_{1,n-1}$ ou $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$.

Caso 4. $\mu_1(G) > \mu_2(G) = \mu_{n-2}(G) > \mu_{n-1}(G)$. Neste caso, pelo Lema 4.5, teremos $\mu_1(G) > \mu_2(G) = \ldots = \mu_{n-2}(G) > \mu_{n-1}(G)$ se, e somente se, $G \cong K_{n-1} + e$, $G \cong K_1 \vee 2K_{\frac{n-1}{2}}$, $G \cong \overline{K_{\frac{n}{3}}} \vee 2K_{\frac{n}{3}}$ ou $G \cong \mathcal{G}(r, \frac{n}{2} - r)$, onde $1 \leq r < \frac{n}{2}$.

Depreende-se dos resultados acima, que $\mu_2(G)+\mu_2(\overline{G}) \geq n$ e a igualdade ocorre se, e somente se, $G \cong K_n$, $G \cong K_n - e$, $G \cong K_{1,n-1}$, $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$, $G \cong K_{n-1} + e$, $G \cong K_1 \vee 2K_{\frac{n-1}{2}}$, $G \cong \overline{K_{\frac{n}{3}}} \vee 2K_{\frac{n}{3}}$ ou $G \cong \mathcal{G}(r, \frac{n}{2} - r)$, onde $1 \leq r < \frac{n}{2}$.

□

Observe que alguns grafos extremais do Teorema 4.1 só são factíveis para determinados valores de n, conforme resumimos abaixo:

- $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ e $\mathcal{G}(r, \frac{n}{2} - r)$, onde $1 \leq r < \frac{n}{2}$ só ocorrem quando n é par;
- $K_1 \vee 2K_{\frac{n-1}{2}}$ só ocorre quando n é ímpar;
- $\overline{K_{\frac{n}{3}}} \vee 2K_{\frac{n}{3}}$ só ocorre quando $n = 3k$ e $k \geq 2$.

Exemplo 4.1. *A Figura 18 exibe os grafos extremais do Teorema 4.1 para* $n = 6$*.*

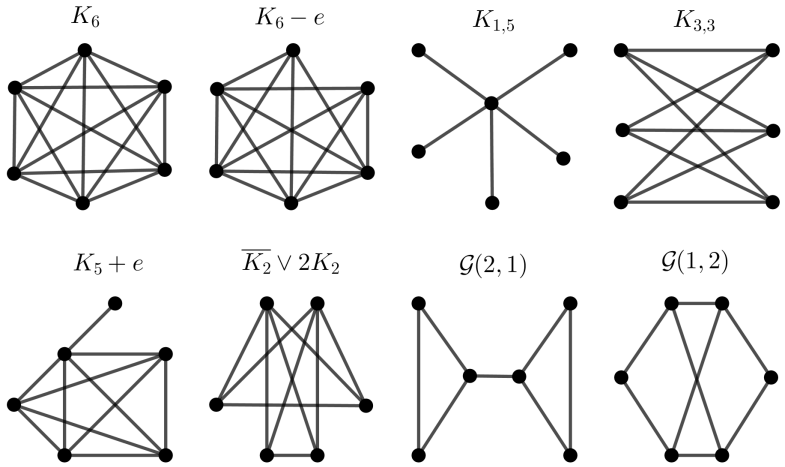


Figura 18: Grafos extremais K_6, $K_6 - e$, $K_{1,5}$, $K_{3,3}$, $K_5 + e$, $\overline{K_2} \vee 2K_2$, $\mathcal{G}(2,1)$, $\mathcal{G}(1,2)$

Exemplo 4.2. *A Figura 19 ilustra os grafos extremais do Teorema 4.1 para* $n = 7$*.*

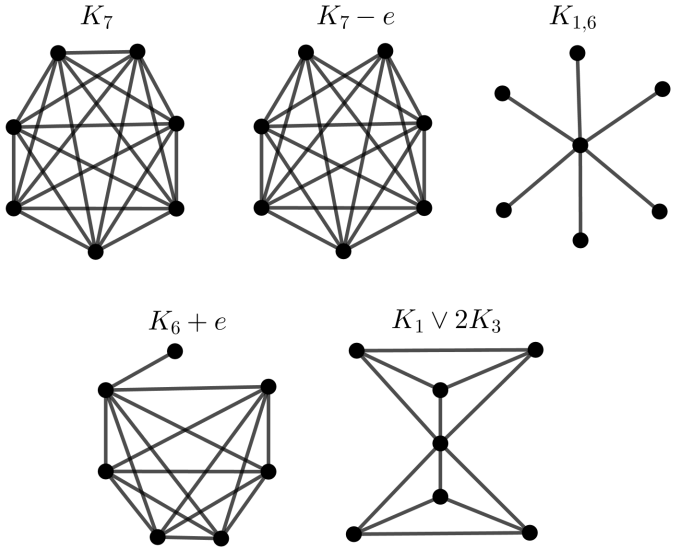


Figura 19: Grafos extremais K_7, $K_7 - e$, $K_{1,6}$, $K_6 + e$, $K_1 \vee 2K_3$

4.2 Duas novas cotas superiores

Nesta seção estudamos cotas superiores Nordhaus-Gaddum para $\mu_2(G)+\mu_2(\overline{G})$. Mostramos inicialmente um resultado preliminar no Teorema 4.2 e posteriormente, nos Teoremas 4.3 e 4.4, apresentamos resultados mais robustos, melhorando a cota do Teorema 4.2. Por fim, propusemos a Conjectura 4.1.

Para as demonstrações dos teoremas precisamos dos seguintes lemas descritos abaixo:

Lema 4.6 ([68]). *Seja G um grafo de ordem n e diâmetro $d(G) \neq 3$. Então as inequações abaixo são equivalentes:*

- $\mu_1(G) - \mu_{n-1}(G) \leq n-1$;
- $\mu_1(\overline{G}) - \mu_{n-1}(\overline{G}) \leq n-1$;
- $\mu_{n-1}(G) + \mu_{n-1}(\overline{G}) \geq 1$.

Além disso, se $d(G) = 2$, a igualdade ocorre se, e somente se, $G \cong K_1 \vee F$, onde F é um grafo desconexo de ordem $n-1$.

Lema 4.7 ([50]). *Sejam G e H grafos de ordem n_1 e n_2, respectivamente. Então*

(i) $Spec_L(\overline{G}) = \{n_1 - \mu_{n_1-1}(G_1), n_1 - \mu_{n_1-2}(G), \ldots, n_1 - \mu_1(G), 0\}$;

(ii) $Spec_L(G \cup H) = \{\mu_1(G), \ldots, \mu_{n_1-1}(G), \mu_1(H), \ldots, \mu_{n_2-1}(H), 0, 0\}$.

Lema 4.8 ([45]). *Sejam G e H grafos com conjuntos disjuntos de vértices de ordem n_1 e n_2, respectivamente. Então*

$$Spec_L(G \vee H) = \{n_1+n_2, \mu_1(G)+n_2, \ldots, \mu_{n_1-1}(G)+n_2, \mu_1(H)+n_1, \ldots, \mu_{n_2-1}(H)+n_1, 0\}.$$

Lema 4.9 ([44]). *Para qualquer grafo G com n vértices, $\mu_1(G) \leq n$, e a igualdade ocorre se, e somente se, $\overline{G}$ é desconexo.*

Lema 4.10 ([29]). *Seja $n = s+t+2$, com $s, t \geq 1$ e seja $L(T(s,t))$ a matriz laplaciana da família de árvores $T(s,t)$ com conectividade algébrica $\alpha(T(s,t))$. O único autovalor de $L(T(s,t))$ menor do que um é $\alpha(T(s,t))$. Além disso, para cada $1 \leq s \leq \frac{n-2}{2}$, $\alpha(T(s,t))$ é uma função de s estritamente decrescente.*

Lema 4.11 ([62]). *Qualquer grafo $G \in G(n,d)$ com n vértices e diâmetro $d = d(G)$ é um subgrafo de no mínimo um grafo da família $G_d(n_1 = 1, n_2, \ldots, n_d, n_{d+1} = 1)$ com $n = \sum_{i=1}^{d+1} n_i$.*

Lema 4.12 ([62]). *Dado um grafo em $G(n,d)$ com n vértices e diâmetro $d = d(G)$. O máximo de qualquer autovalor $\mu_{i_{max}}(G(n,d))$, onde $1 \leq i \leq n$, é não crescente conforme o diâmetro d aumenta, isto é, $\mu_{i_{max}}(G(n,d+1)) \leq \mu_{i_{max}}(G(n,d))$.*

O Teorema 4.2 exibe a nossa primeira cota de Nordhaus-Gaddum para $\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G})$.

Teorema 4.2. *Seja G um grafo de ordem $n \geq 2$. Então*

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq 2n - 1.$$

Demonstração. Primeiramente, suponhamos que $d(G) \neq 3$. Sabemos que para todo grafo G, $\mu_{n-2}(G) \geq \mu_{n-1}(G)$ e, analogamente, $\mu_{n-2}(\overline{G}) \geq \mu_{n-1}(\overline{G})$. Como $d(G) \neq 3$, pelo Lema 4.6, temos que $\mu_{n-1}(G) + \mu_{n-1}(\overline{G}) \geq 1$. Portanto,

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) = n - \mu_{n-2}(\overline{G}) + n - \mu_{n-2}(G) \leq 2n - (\mu_{n-1}(G) + \mu_{n-1}(\overline{G})) \leq 2n - 1.$$

Agora, suponhamos que $d(G) = 3$. Portanto, $G \in G(n,3)$ e pelo Lema 4.11, G é um subgrafo de no mínimo um grafo da família $G_3(1, n_2, n_3, 1)$ com $n = \sum_{i=1}^{4} n_i = n_2 + n_3 + 2$.

Como $G \subseteq G_3(1, n_2, n_3, 1)$, o Teorema 1.8 garante que $\mu_2(G) \leq \mu_2(G_3(1, n_2, n_3, 1))$ para no mínimo algum n_2 e n_3 inteiros positivos, tais que $n_2 + n_3 = n - 2$.

Por outro lado, é fácil ver que $\overline{G_3(1, n_2, n_3, 1)} = T(n_2, n_3)$. Além disso, pelo Lema 4.10, o único autovalor laplaciano de $T(n_2, n_3)$ menor que um é $\mu_{n-1}(T(n_2, n_3))$, para todo n_2, n_3. Assim $\mu_{n-2}(T(n_2, n_3)) \geq 1$. Portanto,

$$\mu_2(G) \leq \mu_2(G_3(1, n_2, n_3, 1)) = n - \mu_{n-2}(T(n_2, n_3)) \leq n - 1.$$

Como $\mu_2(\overline{G}) \leq n$, concluímos que

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq 2n - 1.$$

□

Nos próximos teoremas apresentamos os resultados principais desta seção. Conseguimos uma cota superior significativamente melhor do que a apresentada no Teorema 4.2.

Teorema 4.3. *Seja G um grafo desconexo de ordem $n \geq 2$. Então*

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq 2n - 2.$$

E a igualdade ocorre se, e somente se, $G \cong 2K_1 \cup H$, onde $\overline{H}$ é um grafo desconexo de ordem $n-2$ com no mínimo 3 componentes conexas.

Demonstração. Seja $G \cong G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_s$, $s \geq 2$, onde G_i são as componentes conexas de G, com $|V(G_i)| = n_i$, assumindo sem perda de generalidade que $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_s$.

Consideraremos três casos distintos: $s = 2$, $s \geq 4$ e $s = 3$.

Caso 1. Suponhamos que $s = 2$. Neste caso, $G \cong G_1 \cup G_2$ e $\overline{G} \cong \overline{G_1} \vee \overline{G_2}$.

Subcaso 1. Se $2 \leq n_1 \leq n_2$, então $\mu_2(G) = \max\{n_1, n_2\} \leq n - 2$. Por outro lado, pelos Lemas 4.8 e 4.9, $\mu_2(\overline{G}) = \max\{n_1 + \mu_1(\overline{G_2}), n_2 + \mu_1(\overline{G_1})\} < n$, pois G_1 e G_2 são conexos.

Portanto,

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) < 2n - 2.$$

Subcaso 2. Assumindo $1 = n_1 \leq n_2$, então $G \cong K_1 \cup G_2$ e $\overline{G} \cong K_1 \vee \overline{G_2}$.

Passamos agora a observar o diâmetro de G_2.

• Se $d(G_2) = 1$, então $G \cong K_1 \cup K_{n_2}$ e $\overline{G} \cong K_1 \vee \overline{K_{n_2}}$.

Trivialmente,

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq n.$$

• Se $d(G_2) = 2$ e $\overline{G_2}$ é conexo, então cada par de vértices não adjacentes v_i, v_j em G_2 tem vizinhos em comum, ou seja, $|N_{G_2}(v_i) \cap N_{G_2}(v_j)| \geq 1$. Isso implica que cada par de vértices v_i, v_j de $\overline{G_2}$ tem $|N_{\overline{G_2}}(v_i) \cup N_{\overline{G_2}}(v_j)| \leq n_2 - 1$ [68]. Portanto, pela Proposição 1.16,

$$\mu_1(\overline{G_2}) \leq \max_{v_i v_j \in E(\overline{G_2})} \{|N_{\overline{G_2}}(v_i) \cup N_{\overline{G_2}}(v_j)|\} \leq n_2 - 1.$$

Por outro lado, se $\overline{G_2}$ é desconexo o Lema 4.6 garante que $\mu_1(\overline{G_2}) \leq n_2 - 1$. Logo, se $d(G_2) = 2$, então $\mu_1(\overline{G_2}) \leq n_2 - 1$ e a igualdade ocorre se, e somente se, $G_2 \cong K_1 \vee F$,

onde F é desconexo com $n_2 - 1$ vértices.

Primeiramente, suponhamos que $G_2 \ncong K_1 \vee F$.

Pelos Lemas 4.7, 4.8 e 4.9, $\mu_2(\overline{G}) = 1 + \mu_1(\overline{G_2}) < 1 + n_2 - 1 = n_2$ e $\mu_2(G) = \mu_2(G_2) \leq n_2$.

Como $n_2 + n_2 = 2n - 2$, segue que

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) < 2n - 2.$$

Agora, se $G_2 \cong K_1 \vee F$, então $G \cong K_1 \cup (K_1 \vee F)$.

Como F é desconexo e de ordem $n_2 - 1$, então $\mu_1(F) \leq n_2 - 2$. Novamente, aplicando os Lemas 4.7, 4.8 e 4.9, temos que $\mu_2(G) = \mu_2(K_1 \vee F) = 1 + \mu_1(F) \leq 1 + n_2 - 2 = n_2 - 1$ e $\mu_2(\overline{G}) = n_2$.

Como $n_2 - 1 + n_2 = 2n - 3$, segue que

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq 2n - 3.$$

• Seja $d(G_2) \geq 3$. Se $d(G_2) = 3$, então $G_2 \in G(n_2, 3)$ e pelo mesmo argumento do Teorema 4.2, $\mu_2(G_2) \leq n_2 - 1$. Agora, se $d(G) \geq 4$, então o Lema 4.12 garante que o máximo de $\mu_2(G_2)$ é não crescente conforme o diâmetro d aumenta.

Portanto, $\mu_2(G_2) \leq \mu_{2_{max}}(G(n_2, d)) \leq \mu_{2_{max}}(G(n_2, 3)) \leq n_2 - 1$.

Pelos Lemas 4.7, 4.8 e 4.9, $\mu_2(G) = \mu_2(G_2) \leq n_2 - 1$ e $\mu_2(\overline{G}) = 1 + \mu_1(\overline{G_2}) < 1 + n_2$, pois G_2 é conexo.

Como $n_2 - 1 + 1 + n_2 = 2n - 2$, segue que

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) < 2n - 2$$

Conclui-se, de todo o exposto acima, que se G é desconexo e $s = 2$, então

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) < 2n - 2.$$

Caso 2. Suponhamos agora que $s \geq 4$. Neste caso, $G \cong G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_s$.

Logo, $\mu_2(G) \leq \max\{n_i : 1 \leq i \leq s\} \leq n - 3$ e pelo Lema 4.7, $\mu_2(\overline{G}) = n$.

Portanto,

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq 2n - 3.$$

Caso 3. Por fim, suponhamos que $s = 3$. Neste caso, $G \cong G_1 \cup G_2 \cup G_3$.

• Se $n_1 \geq 2$ ou $n_2 \geq 2$, então $\mu_2(G) \leq \max\{n_1, n_2, n_3\} \leq n - 3$ e pelo Lema 4.7, $\mu_2(\overline{G}) = n$.

Portanto,

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq 2n - 3.$$

• Assumindo que $n_1 = 1$ e $n_2 = 1$ e escrevendo $G_3 = H$, então $G \cong 2K_1 \cup H$. Neste caso, pelo Lema 4.7, $\mu_2(\overline{G}) = n$, pois G tem três componentes conexas.

Por outro lado, pelo Lemas 4.7, $\mu_2(G) = \mu_2(H) \leq n_3 = n-2$ e a igualdade ocorre se, e somente se, $\mu_{n_3-2}(\overline{H}) = 0$, ou seja, $\overline{H}$ é um grafo desconexo com no mínimo 3 componentes conexas.

Conclui-se, de todo exposto acima, que se G é desconexo, então

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq 2n - 2.$$

E a igualdade ocorre se, e somente se, $G \cong 2K_1 \cup H$, onde $\overline{H}$ é um grafo desconexo de ordem $n - 2$ com no mínimo 3 componentes conexas.

□

Teorema 4.4. *Seja G um grafo de ordem $n \geq 2$ com $d(G) \neq 2$ e $d(\overline{G}) \neq 2$. Então*

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq 2n - 2.$$

Demonstração. Suponhamos que G seja um grafo com $d(G) \neq 2$ e $d(\overline{G}) \neq 2$. Portanto, existem apenas três casos distintos para o diâmetro de G.

Caso 1. $d(G) = \infty$. Neste caso, G é desconexo e pelo Teorema 4.3, $\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq 2n - 2$.

Caso 2. $d(G) = 1$. Neste caso, $G \cong K_n$. Sabemos que, $\mu_2(K_n) + \mu_2(\overline{K_n}) = n \leq 2n - 2$.

Caso 3. $d(G) \geq 3$. Se $d(G) = 3$, então $G \in G(n, 3)$ e pelo mesmo argumento do Teorema 4.2, $\mu_2(G) \leq n - 1$. Agora, se $d(G) \geq 4$, então o Lema 4.12 garante que o máximo de $\mu_2(G)$ é não crescente conforme o diâmetro d aumenta.

Logo, $\mu_2(G) \leq \mu_{2_{max}}(G(n, d)) \leq \mu_{2_{max}}(G(n, 3)) \leq n - 1$.

Usando raciocínio análogo, se $d(\overline{G}) \neq 2$, então $\mu_2(\overline{G}) \leq n - 1$. Portanto, se

$d(G) \neq 2$ e $d(\overline{G}) \neq 2$, então

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq 2n - 2.$$

□

As Proposições abaixo apresentam classes de grafos para os quais $\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq 2n - 2$.

Proposição 4.1. *Seja G um grafo bipartido de ordem $n \geq 2$. Então*

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq 2n - 2.$$

Demonstração. Se $d(G) \neq 2$ e $d(\overline{G}) \neq 2$, então pelo Teorema 4.4 $\mu_2(G)+\mu_2(\overline{G}) \leq 2n-2$.

Se $d(G) = 2$, então G é bipartido completo [69], e segue que $G \cong K_{r,s}$, para algum $r, s \geq 1$, tal que $n = r + s$.

Sabemos que $Spec_L(K_{r,s}) = Spec_Q(K_{r,s}) = \begin{bmatrix} r+s & r & s & 0 \\ 1 & s-1 & r-1 & 1 \end{bmatrix}$.

Portanto, $\mu_2(K_{r,s}) \leq \max\{r, s\} \leq n - 2$. Conclui-se que

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq 2n - 2.$$

□

Corolário 4.1. *Se G é uma árvore de ordem $n \geq 2$, então $\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq 2n - 2$.*

Demonstração. Seja G uma árvore. Como toda árvore é um grafo conexo e sem ciclos, segue da Proposição 1.1 que G é bipartido. Portanto, $\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq 2n - 2$. □

Proposição 4.2. *Seja G um grafo $k-$regular de ordem $n \geq 2$. Então*

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq 2n - 2.$$

Demonstração. Se G é desconexo, pelo Teorema 4.2, temos que, $\mu_2(G)+\mu_2(\overline{G}) \leq 2n-2$.

Suponhamos que G é conexo. Se $n \leq 6$, o resultado segue por cálculos computacionais. Se $n \geq 7$, aplicando o Teorema de Weyl, temos que

$$\mu_2(G) \leq \lambda_2(D) + \lambda_1(-A) = k - \lambda_n(A) = k - \lambda_n(G) \tag{4.1}$$

$$\mu_2(\overline{G}) \leq \lambda_2(\overline{D}) + \lambda_1(-\overline{A}) = n - 1 - k - \lambda_n(\overline{A}) = n - k - 1 - \lambda_n(\overline{G}). \tag{4.2}$$

Pelo Lema 3.1, $\lambda_n(A) \leq 0$. Portanto, somando as inequações (4.1) e (4.2) obtemos

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq n - 1 + |\lambda_n(G)| + |\lambda_n(\overline{G})|.$$

O Lema 3.2 garante que

$$|\lambda_n(G)| + |\lambda_n(\overline{G})| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}n + 1.$$

Portanto,

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq n - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}n + 1 = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)n.$$

Note que $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)n - 2n + 2 \leq 0$, para todo $n \geq 7$. Concluímos que

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq 2n - 2.$$

□

Os resultados das Proposições 4.1 e 4.2 e do Corolário 4.1 exibem classes de grafos que satisfazem $\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq 2n - 2$. Além disso, os Teoremas 4.3 e 4.4 mostram que se G e $\overline{G}$ tem diâmetro diferente de 2, então $\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq 2n - 2$. A partir desses resultados propomos a seguinte conjectura.

Conjectura 4.1. *Seja G um grafo de ordem $n \geq 2$. Então*

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq 2n - 2.$$

E a igualdade ocorre se, e somente se, $G \cong K_2 \vee H$, onde H é um grafo desconexo de ordem $n - 2$ com no mínimo 3 componentes conexas.

Conclusão

No decorrer deste capítulo destacamos as contribuições deste trabalho e indicamos possíveis linhas de pesquisa para desenvolvimento futuro.

No Capítulo 2 exibimos os resultados encontrados na literatura a respeito das relações de Nordhaus-Gaddum envolvendo autovalores das matrizes A, L e Q, contribuindo para pesquisas futuras através da reunião em um único documento da maioria das relações de Nordhaus-Gaddum para os autovalores dessas matrizes.

No Capítulo 3 avançamos na direção da comprovação das Conjecturas 2.1 e 2.2, que seguem em aberto. Conseguimos provar no Teorema 3.1 que a Conjectura 2.1 é satisfeita para a classe de grafos cuja diferença entre o grau máximo e o grau mínimo não exceda $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)n - 1$. No Teorema 3.2, provamos a Conjectura 2.2 para grafos regulares.

No Capítulo 4 desenvolvemos cotas de Nordhaus-Gaddum inferiores e superiores para $\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G})$. Destacamos que a cota inferior do Teorema 4.1 é a melhor cota possível, haja vista a caracterização dos grafos extremais. No Teorema 4.2 construímos uma cota superior que pôde ser aprimorada nos Teoremas 4.3 e 4.4. Por fim, propusemos a Conjectura 4.1. Cabe destacar que até a conclusão deste trabalho não havia cotas deste tipo na literatura, sendo esta uma de nossas mais relevantes contribuições.

Como sugestões para trabalhos futuros, propomos continuar a investigação das Conjecturas 2.1 e 2.2 na tentativa de demonstrá-las ou refutá-las. Nesta mesma linha, destacamos o estudo da Conjectura 4.1 proposta nesta dissertação. Por fim, sugerimos o desenvolvimento de novas cotas de Nordhaus-Gaddum para os demais autovalores de L e Q.

Referências Bibliográficas

[1] ABREU, N., DEL-VECCHIO, R., TREVISAN, V., E VINAGRE, C. Teoria espectral de grafos - uma introduçao. *SBM* (2014).

[2] AFSHARI, B., AKBARI, S., MOGHADDAMZADEH, M., E MOHAR, B. The algebraic connectivity of a graph and its complement. *Linear Algebra and its Applications 555* (2018), 157–162.

[3] AMIN, A., E HAKIMI, S. Upper bounds on the order of a clique of a graph. *SIAM Journal on Applied Mathematics 22*, 4 (1972), 569–573.

[4] ANDERSON JR, W. N., E MORLEY, T. D. Eigenvalues of the laplacian of a graph. *Linear and multilinear algebra 18*, 2 (1985), 141–145.

[5] AOUCHICHE, M., E HANSEN, P. A survey of nordhaus–gaddum type relations. *Discrete Applied Mathematics 161*, 4-5 (2013), 466–546.

[6] ASHRAF, F., E TAYFEH-REZAIE, B. Nordhaus–gaddum type inequalities for laplacian and signless laplacian eigenvalues. *arXiv preprint arXiv:1402.2995* (2014).

[7] BAO, Y.-H., TAN, Y.-Y., E FAN, Y.-Z. The laplacian spread of unicyclic graphs. *Applied Mathematics Letters 22*, 7 (2009), 1011–1015.

[8] BIGGS, N., LLOYD, E. K., E WILSON, R. J. *Graph Theory, 1736-1936*. Oxford University Press, 1976.

[9] BROUWER, A. E., E HAEMERS, W. H. *Spectra of graphs*. Springer Science & Business Media, 2011.

[10] CARDOSO, D. M., DE FREITAS, M. A. A., MARTINS, E. A., E ROBBIANO, M. Spectra of graphs obtained by a generalization of the join graph operation. *Discrete Mathematics 313*, 5 (2013), 733–741.

[11] CARDOSO, D. M., MARTINS, E. A., ROBBIANO, M., E ROJO, O. Eigenvalues of a h-generalized join graph operation constrained by vertex subsets. *arXiv preprint arXiv:1205.1752* (2012).

[12] CHEN, X., E DAS, K. C. Some results on the laplacian spread of a graph. *Linear Algebra and its Applications 505* (2016), 245–260.

[13] CHEN, Y., E WANG, L. The laplacian spread of tricyclic graphs. *the electronic journal of combinatorics 16*, 1 (2009), 80.

[14] CVETKOVIC, D. Spectral theory of graphs based on the signless laplacian. Relatório técnico, Research report. Availiable at www.mi.sanu.ac.rs/projects/signlessLreportJan28.pdf, 2010.

[15] CVETKOVIC, D., CVETKOVIĆ, D. M., ROWLINSON, P., E SIMIC, S. *Eigenspaces of graphs*, vol. 66. Cambridge University Press, 1997.

[16] CVETKOVIĆ, D., ROWLINSON, P., E SIMIĆ, S. K. Signless laplacians of finite graphs. *Linear Algebra and its applications 423*, 1 (2007), 155–171.

[17] CVETKOVIC, D., SIMIC, S., E ROWLINSON, P. *An introduction to the theory of graph spectra*. Cambridge University Press, 2009.

[18] CVETKOVIĆ, D. M. Graphs and their spectra. *Publikacije Elektrotehničkog fakulteta. Serija Matematika i fizika*, 354/356 (1971), 1–50.

[19] DAS, K. C. An improved upper bound for laplacian graph eigenvalues. *Linear algebra and its applications 368* (2003), 269–278.

[20] DAS, K. C. A sharp upper bound for the number of spanning trees of a graph. *Graphs and Combinatorics 23*, 6 (2007), 625–632.

[21] DAS, K. C., LIU, M., E SHAN, H. Upper bounds on the (signless) laplacian eigenvalues of graphs. *Linear Algebra and its Applications 459* (2014), 334–341.

[22] DE ABREU, N. M. M. Old and new results on algebraic connectivity of graphs. *Linear algebra and its applications 423*, 1 (2007), 53–73.

[23] DE FREITAS, A. C. C. Um survey sobre o índice da matriz laplaciana sem sinal de um grafo. *Dissertaçao de mestrado do PPPRO do CEFET* (2012).

[24] DE LIMA, L. S., E NIKIFOROV, V. On the second largest eigenvalue of the signless laplacian. *Linear Algebra and its Applications 438*, 3 (2013), 1215–1222.

[25] DOOB, M. A surprising property of the least eigenvalue of a graph. *Linear Algebra and Its Applications 46* (1982), 1–7.

[26] FENG, L., E YU, G. On three conjectures involving the signless laplacian spectral radius of graphs. *Publications de l'Institut Mathematique 85*, 99 (2009), 35–38.

[27] FIEDLER, M. Algebraic connectivity of graphs. *Czechoslovak mathematical journal 23*, 2 (1973), 298–305.

[28] GANTMAKHER, F. R. *The theory of matrices*, vol. 131. American Mathematical Soc., 1998.

[29] GRONE, R., E MERRIS, R. Ordering trees by algebraic connectivity. *Graphs and Combinatorics 6*, 3 (1990), 229–237.

[30] GRONE, R., E MERRIS, R. The laplacian spectrum of a graph ii. *SIAM Journal on Discrete Mathematics 7*, 2 (1994), 221–229.

[31] GUTMAN, I., E DAS, K. C. The first zagreb index 30 years after. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem 50* (2004), 83–92.

[32] GUTMAN, I., KIANI, D., MIRZAKHAH, M., E ZHOU, B. On incidence energy of a graph. *Linear Algebra and its Applications 431*, 8 (2009), 1223–1233.

[33] HAEMERS, W. H., E SPENCE, E. Enumeration of cospectral graphs. *European Journal of Combinatorics 25*, 2 (2004), 199–211.

[34] HELMBERG, C., E TREVISAN, V. Threshold graphs of maximal laplacian energy. *Discrete Mathematics 338*, 7 (2015), 1075–1084.

[35] HORN, R. A., E JOHNSON, C. R. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, 1990.

[36] HÜCKEL, E. Quantentheoretische beiträge zum benzolproblem. *Zeitschrift für Physik 70*, 3-4 (1931), 204–286.

[37] IKEBE, Y., INAGAKI, T., E MIYAMOTO, S. The monotonicity theorem, cauchy's interlace theorem, and the courant-fischer theorem. *The American Mathematical Monthly 94*, 4 (1987), 352–354.

[38] KOBER, H. On the arithmetic and geometric means and on hölder's inequality. *Proceedings of the American Mathematical Society* (1958), 452–459.

[39] LI, S., E TIAN, Y. Some bounds on the largest eigenvalues of graphs. *Applied Mathematics Letters 25*, 3 (2012), 326–332.

[40] LIU, H., LU, M., E TIAN, F. On the laplacian spectral radius of a graph. *Linear algebra and its applications 376* (2004), 135–141.

[41] LIU, Y. The laplacian spread of cactuses. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 12*, 3 (2010), 35–40.

[42] LIU, Y., E WANG, L. The laplacian spread of bicyclic graphs. *Advances in Mathematics 40*, 6 (2011).

[43] MAHADEV, N. V., E PELED, U. N. *Threshold graphs and related topics*, vol. 56. Elsevier, 1995.

[44] MERRIS, R. Laplacian matrices of graphs: a survey. *Linear algebra and its applications 197* (1994), 143–176.

[45] MERRIS, R. Laplacian graph eigenvectors. *Linear algebra and its applications 278*, 1-3 (1998), 221–236.

[46] MERRIS, R. A note on laplacian graph eigenvalues. *Linear algebra and its applications 285*, 1-3 (1998), 33–35.

[47] MERRIS, R. *Graph Theory*. John Wiley & Sons, 2001.

[48] MEYER, C. D. *Matrix analysis and applied linear algebra*, vol. 71. Siam, 2000.

[49] MOHAMMADIAN, A., E TAYFEH-REZAIE, B. Graphs with four distinct laplacian eigenvalues. *Journal of Algebraic Combinatorics 34*, 4 (2011), 671–682.

[50] MOHAR, B., ALAVI, Y., CHARTRAND, G., E OELLERMANN, O. The laplacian spectrum of graphs. *Graph theory, combinatorics, and applications 2*, 871-898 (1991), 12.

[51] NIKIFOROV, V. Eigenvalue problems of nordhaus–gaddum type. *Discrete Mathematics 307*, 6 (2007), 774–780.

[52] NIKIFOROV, V. Extrema of graph eigenvalues. *Linear Algebra and its Applications 482* (2015), 158–190.

[53] NIKIFOROV, V., E YUAN, X. More eigenvalue problems of nordhaus–gaddum type. *Linear Algebra and its Applications 451* (2014), 231–245.

[54] NORDHAUS, E. . A., E GADDUM, J. W. On complementary graphs. *The American Mathematical Monthly 63*, 3 (1956), 175–177.

[55] NOSAL, E. Eigenvalues of graphs. *Tese de mestrado. University of Calgary, Calgary, Al- berta, Canada* (1970).

[56] SHI, L. Bounds on the (laplacian) spectral radius of graphs. *Linear algebra and its applications 422*, 2-3 (2007), 755–770.

[57] SO, W. Commutativity and spectra of hermitian matrices. *Linear Algebra and Its Applications 212* (1994), 121–129.

[58] TERPAI, T. Proof of a conjecture of v. nikiforov. *Combinatorica 31*, 6 (2011), 739–754.

[59] VAN DAM, E. R., E HAEMERS, W. H. Which graphs are determined by their spectrum? *Linear Algebra and its applications 373* (2003), 241–272.

[60] VAN DEN HEUVEL, J. Hamilton cycles and eigenvalues of graphs. *Linear algebra and its applications 226* (1995), 723–730.

[61] VON COLLATZ, L., E SINOGOWITZ, U. Spektren endlicher grafen. In *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* (1957), vol. 21, Springer, pp. 63–77.

[62] WANG, H., KOOIJ, R., E VAN MIEGHEM, P. Graphs with given diameter maximizing the algebraic connectivity. *Linear Algebra and its Applications 433*, 11-12 (2010), 1889–1908.

[63] WANG, T., JIA, L., E SUN, F. Bounds of the spectral radius and the Nordhaus-Gaddum type of the graphs. *The Scientific World Journal 2013* (2013).

[64] WANG, T., LI, B., ZOU, J., SUN, F., E ZHANG, Z. New bounds of the nordhaus-gaddum type of the laplacian matrix of graphs. In *Computational Intelligence and Security (CIS), 2012 Eighth International Conference on* (2012), IEEE, pp. 411–414.

[65] XU, Y., E MENG, J. The laplacian spread of quasi-tree graphs. *Linear Algebra and its Applications 435*, 1 (2011), 60–66.

[66] YI-ZHENG, F., XU, J., WANG, Y., E LIANG, D. The laplacian spread of a tree. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 10*, 1 (2008).

[67] YOU, Z., E LIU, B. The laplacian spread of graphs. *Czechoslovak mathematical journal 62*, 1 (2012), 155–168.

[68] ZHAI, M., SHU, J., E HONG, Y. On the laplacian spread of graphs. *Applied Mathematics Letters 24*, 12 (2011), 2097–2101.

[69] ZHAI, M., SHU, J., E LU, Z. Maximizing the laplacian spectral radii of graphs with given diameter. *Linear Algebra and Its Applications 430*, 8-9 (2009), 1897–1905.

[70] ZHOU, B. On sum of powers of the laplacian eigenvalues of graphs. *Linear Algebra and its Applications 429*, 8-9 (2008), 2239–2246.