CEFET/RJ
DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

RELAÇÕES ENTRE O INCREMENTO DA CONECTIVIDADE ALGÉBRICA E A CONFIABILIDADE DE UMA REDE

Bruno Soares Barreto

Dissertação de Mestrado apresentada ao programa de pós-graduação em Engenharia de Produção e Sistemas do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, CEFET/RJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em engenharia de produção.

Orientadora: Carla Oliveira Silva

Rio de Janeiro

Junho de 2017

RELAÇÕES ENTRE O INCREMENTO DA CONECTIVIDADE ALGÉBRICA E A CONFIABILIDADE DE UMA REDE

Dissertação de Mestrado apresentada ao programa de pós-graduação em Engenharia de Produção e Sistemas do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, CEFET/RJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em engenharia de produção.

Bruno Soares Barreto

Banca Examinadora:

Presidente, Professora Dra. Carla Oliveira Silva (CEFET/RJ)

Professor Dr. Leonardo Silva de Lima (CEFET/RJ)

Professora Dra. Claudia Marcela Justel (IME)

Professor Dr. José André de Moura Brito (ENCE)

Rio de Janeiro

Junho de 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central do CEFET/RJ

B273 Barreto, Bruno Soares
Relações entre o incremento da conectividade algébrica e a confiabilidade de uma rede / Bruno Soares Barreto.—2017.
116f. + apêndice : il. (algumas color.) , grafs. , tabs. ; enc.

Dissertação (Mestrado) Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca , 2017.
Bibliografia : f. 111-116
Orientadora : Carla Oliveira Silva

1. Teoria dos grafos. 2. Conectividade algébrica. 3. Redes - Confiabilidade. 4.Engenharia de produção. I. Silva, Carla Oliveira (Orient.). II. Título.

CDD 511.5

RESUMO

A conectividade algébrica de um grafo é uma medida amplamente abordada na Teoria Espectral de Grafos, pois está relacionada com diversas invariantes do grafo como por exemplo, corte maximal, conectividade de vértices, *toughness*, número isoperimétrico, além de ser associada, por muitos autores, com a robustez da rede, dentre outras diversas abordagens. Por isso, podem ser encontrados diversos trabalhos na literatura que tem como objetivo o aumento da conectividade algébrica da rede, tanto através da inserção de novas arestas, como pela inserção de novos vértices. Por outro lado, a confiabilidade de uma rede representa a capacidade da rede permanecer conexa, seja após a falha de um ou de um subconjunto de seus vértices e/ou arestas. Desta forma, a confiabilidade é uma medida significativamente importante para diversos aplicações reais na análise de redes, como, por exemplo, redes de transporte, transmissão de energia e comunicação, cuja necessidade de manter todos seus vértices conectados é fundamental para o pleno funcionamento do sistema modelado pelo grafo. No entanto, embora a conectividade algébrica e a confiabilidade tenham conceitos próximos, a literatura carece de abordagens que relacione ambos, tanto do ponto de vista teórico-algébrico, como com relação à simulações em casos reais. Este trabalho tem como objetivo avaliar as relações entre estas duas medidas, através da inserção de arestas no grafo. Desta maneira, é possível estudar o impacto que o incremento no valor da conectividade algébrica gera na confiabilidade. Para isso, é realizado um estudo prévio a respeito das diversas estratégias de inserção de arestas existentes na literatura que objetivam a maximização da conectividade algébrica. Posteriormente, são realizadas simulações computacionais baseadas nas melhores estratégias a fim de analisar o comportamento da variação da confiabilidade da rede conforme a variação no valor da conectividade algébrica.

Palavras-chave: Inserção de arestas; conectividade algébrica; confiabilidade de redes

ABSTRACT

Algebraic connectivity is a widely discussed measure in the field of Spectral Graph Theory, since it is related to several graph invariants such as maximal cut, vertex connectivity, toughness, isoperimetric number, besides being associated, by several authors, within network robustness, among other approaches. Therefore, it is possible to find many papers in the literature which aim to increase algebraic connectivity through the insertion of new edges, or through the insertion of new vertices. On the other hand, the reliability of a network represents the faculty of a network to remain connected, either after the failure of one or a subset of its vertices and/or edges. Thus, reliability is a significant measure for several real applications in the field of networks analysis, such as transport networks, energy transmission and communication, since keeping all vertices connected is essential for the system's operation. However, while algebraic connectivity and reliability have close concepts, the literature lacks approaches which relate them both, either with a theoretical-algebraic approach, but also regarding to real scenarios simulation. This work aims to evaluate the relations between these two measures through the insertion of new edges. Therefore, it is possible to study the impact of the increase in algebraic connectivity and reliability. In order to achieve this goal, a previous study is carried out regarding edges insertion strategies that already exist in the literature which aim at maximizing algebraic connectivity. Later, computational simulations are performed based on best strategies in order to analyze the variation of the network reliability according to the variation regarding algebraic connectivity.

Key-words: Insertion of edges; algebraic connectivity; network reliability

SUMÁRIO

SUMÁRIO ..... **vi**
LISTA DE FIGURAS ..... **viii**
LISTA DE GRÁFICOS ..... **x**
LISTA DE TABELAS ..... **xi**
1 INTRODUÇÃO **1**
1.1 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA 2
1.2 OBJETIVOS 3
1.3 METODOLOGIA 4
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO 5
2 PRELIMINARES **6**
2.1 TEORIA DOS GRAFOS 6
2.2 ÁLGEBRA LINEAR E TEORIA ESPECTRAL DOS GRAFOS 11
2.3 CONFIABILIDADE DE REDES 15
2.4 NÚMERO ISOPERIMÉTRICO E *TOUGHNESS* 18
2.5 MEDIDAS DE CENTRALIDADE 20
3 TRABALHOS RELACIONADOS **23**
3.1 VARIAÇÃO DE CONECTIVIDADE ALGÉBRICA 23
3.2 SIMULAÇÕES DAS ESTRATÉGIAS DE INSERÇÃO DE ARESTAS E O AUMENTO NA CONECTIVIDADE ALGÉBRICA 28
3.3 RELAÇÕES ENTRE CONFIABILIDADE EM REDES E MEDIDAS DE CENTRALIDADE 50
4 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS **53**
4.1 INSERÇÃO DE ARESTAS E O AUMENTO DA CONECTIVIDADE ALGÉBRICA E DA CONFIABILIDADE DA REDE – REDES COM 5 E 6 VÉRTICES 53

4.2 INSERÇÃO DE ARESTAS E O AUMENTO DA CONECTIVIDADE ALGÉBRICA E DA CONFIABILIDADE DA REDE – REDES REAIS 64
4.3 INSERÇÃO DE ARESTAS E O AUMENTO DA CONECTIVIDADE ALGÉBRICA E DA CONFIABILIDADE DA REDE – REDES COM VÉRTICES UNIVERSAIS 93
5 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS 107
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 111
APÊNDICE A - Relações entre o aumento no valor da conectividade algébrica e o aumento na Confiabilidade da Rede (grafos com $n = 6$) 117

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Exemplos de grafos 7
Figura 2.2: Exemplos de Floresta e Árvores 9
Figura 2.3: Exemplos de grafo Erdös-Rényi e Barabasi-Albert 10
Figura 2.4: G e sua matriz de adjacência A(G). 12
Figura 2.5: G e sua conectividade algébrica 13
Figura 2.6: Grafo G 14
Figura 2.7: *G*, *H* e seus conjuntos de corte de cardinalidade $\boldsymbol{\lambda = 2}$ 16
Figura 3.1: $G1 = P7$ 29
Figura 3.2: Grafo $G2$ 32
Figura 3.3: Relações de aumento da conectividade algébrica para o grafo $G2$ 36
Figura 3.4: Grafo $G3$ 38
Figura 3.5: Relações de aumento da conectividade algébrica para o grafo $G3$ 42
Figura 3.6: Grafo que modela a Rede Nacional de Ensino e Pesquisa – Brasil – Grafo $G4$. 44
Figura 3.7: Relações de aumento da conectividade algébrica para o grafo $G4$ 48
Figura 4.1: Grafos com 5 vértices e com conectividade de arestas igual a 2 56
Figura 4.2: Grafos com 6 vértices com conectividade de arestas igual a 2 63
Figura 4.3: Rede Abilene 67
Figura 4.4: Rede FUNET 68
Figura 4.5: Rede Rhnet 71
Figura 4.6: Rede MARWAN 73
Figura 4.7: Rede Aarnet 75
Figura 4.8: Rede Gambia 80
Figura 4.9: Rede ERNET 82
Figura 4.10: Construção de rede com vértice universal 94
Figura 4.11: Rede com vértice universal contruída a partir da rede EENET 97

Figura 4.12: Rede com vértice universal contruída a partir da rede Grena 100
Figura 4.13: Grafo 7 104

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 3.1: Relação entre conectividade algébrica e Vetor de Fiedler para o grafo G_1 32
Gráfico 3.2: Relação entre conectividade algébrica e Vetor de Fiedler para grafo G_2 37
Gráfico 3.3: Relação entre conectividade algébrica e conectividade de arestas G_2 38
Gráfico 3.4: Relação entre conectividade algébrica e Vetor de Fiedler para grafo G_3 43
Gráfico 3.5: Relação entre conectividade algébrica e Vetor de Fiedler para a rede real RNP brasileira 49
Gráfico 4.1: Incremento máximo na conectividade algébrica e estratégias de inserção de arestas 66
Gráfico 4.2: Análise comparativa entre o maior incremento na conectividade algébrica, grau mínimo e vetor de Fiedler 70
Gráfico 4.3: Incremento máximo na confiabilidade da rede e estratégias de inserção de arestas 72
Gráfico 4.4: Análise comparativa entre o maior incremento na confiabilidade da rede, grau mínimo e vetor de Fiedler 77
Gráfico 4.5: Análise comparativa entre o maior incremento na confiabilidade da rede e aumento máximo na conectividade algébrica – $\rho = 0{,}1$ 85
Gráfico 4.6: Análise comparativa entre o maior incremento na confiabilidade da rede e aumento máximo na conectividade algébrica – $\rho = 0{,}05$ 88
Gráfico 4.7: Gráficos de correlação: aumento da conectividade algébrica e aumento da confiabilidade da rede 91
Gráfico 4.8: Aumento máximo na conectividade algébrica para redes com vértices universais 96
Gráfico 4.9: Análise comparativa entre o maior incremento na confiabilidade da rede, grau mínimo e vetor de Fiedler – $\rho = 0{,}1$ 99
Gráfico 4.10: Análise comparativa entre o maior incremento na confiabilidade da rede e aumento máximo na conectividade algébrica em redes com vértice universal – $\rho = 0{,}1$ 103

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1: Relações entre conectividade algébrica, conectividade de vértice e de aresta 15
Tabela 2.2: Relações entre o número isoperimétrico e conectividade algébrica 19
Tabela 3.1: Relações entre o aumento da conectividade algébrica através da inserção de uma aresta no grafo P_7 entre os vértices vi e vj 30
Tabela 3.2: Relações entre o aumento da conectividade algébrica através da inserção de uma aresta no grafo $G2$ entre os vértices vi e vj 34
Tabela 3.3: Relações entre o aumento da conectividade algébrica através da inserção de uma aresta no grafo $G3$ entre os vértices vi e vj 40
Tabela 3.4: Relações entre o aumento da conectividade algébrica através da inserção de uma aresta no grafo $G4$ entre os vértices vi e vj 46
Tabela 3.5: Combinações de vértices para a rede RNP brasileira 49
Tabela 4.1: Relações entre a inserção de uma aresta e o aumento na confiabilidade do grafo (n =5) 58
Tabela 4.1: Relações entre a inserção de uma aresta e o aumento na confiabilidade do grafo (n =5) 59
Tabela 4.2: Redes Topology Zoo 65
Tabela 4.3: Redes com aumento ótimo de conectividade algébrica por estratégia de inserção de aresta 66
Tabela 4.4: Exemplos de inserção de arestas - rede Abilene 67
Tabela 4.5: Exemplos de inserção de arestas - rede FUNET 68
Tabela 4.6: Exemplos de inserção de arestas e conectividade algébrica - rede Rhnet 71
Tabela 4.7: Redes com aumento máximo de confiabilidade por estratégia de inserção de aresta 72
Tabela 4.8: Exemplos de inserção de arestas - rede MARWAN 74
Tabela 4.9: Exemplos de inserção de arestas e confiabilidade - rede Rhnet 74
Tabela 4.10: Exemplos de inserção de arestas e confiabilidade - rede Aarnet 75

Tabela 4.11: Total de possibilidades de inserção de arestas - estratégia de vértices de menor grau e estratégia do vetor de Fiedler 79
Tabela 4.12: Exemplos de inserção de arestas e confiabilidade - rede Gambia 80
Tabela 4.13: Amplitude do incremento percentual na confiabilidade para as estratégias do grau mínimo e do vetor de Fiedler, em pontos percentuais 81
Tabela 4.14: Exemplos de inserção de arestas, conectividade algébrica e confiabilidade - rede ERNET 83
Tabela 4.15: Coeficiente de correlação entre aumento da conectividade algébrica e aumento da confiabilidade 92
Tabela 4.16: Exemplos de inserção de arestas e conectividade algébrica - rede com vértice universal contruída a partir da rede EENET 97
Tabela 4.17: Exemplos de inserção de arestas e confiabilidade - rede com vértice universal contruída a partir da rede Grena 100
Tabela 4.18: Total de possibilidades de inserção de arestas - estratégia de vértices de menor grau e estratégia do vetor de Fiedler para redes com vértice universal 101
Tabela 4.19: Amplitude do incremento na confiabilidade para as estratégias do grau mínimo e do vetor de Fiedler, em pontos percentuais – redes com vértice universal 102
Tabela 4.20: Exemplos de inserção de arestas, conectividade algébrica e confiabilidade – Grafo 7 105

1 INTRODUÇÃO

Redes são capazes de modelar um amplo número de sistemas com diversas aplicações práticas, tais como sistemas biológicos, físicos e sociais, exemplificados por redes de transmissão de doenças, transportes, a *World Wide Web*, redes de coautorias de artigos, entre diversos outros processos que nos rodeiam no dia a dia. Essas redes são compostas por elementos que se correlacionam e suas estruturas físicas podem ser modeladas por um objeto matemático denominado grafo.

Um grafo também pode ser representado por matrizes. A partir destas representações por matrizes, surge a Teoria Espectral de Grafos (TEG), cujo objetivo é analisar as propriedades de grafos a partir dos autovalores e autovetores das matrizes associadas a eles. Um dos marcos da TEG está no trabalho de Huckel [50], relacionado à Química Quântica. Neste estudo, Huckel apresenta um modelo no qual relaciona os níveis de energia de elétrons com os autovalores de grafos que modelam alguns tipos de hidrocarbonetos, vide Biggs [7]. Posteriormente, Cvetkovic [51], em 1971, na sua tese de doutorado, formaliza a fundamentação teórica proposta por Huckel.

Um importante parâmetro obtido pela Teoria Espectral de Grafos, é a conectividade algébrica, denotada por $a(G)$. Este parâmetro é amplamente estudado na literatura. Primeiramente, devido à sua importância para avaliação da conectividade do grafo, ou seja, da robustez de um grafo, pois quanto maior é o valor da conectividade algébrica, maior será o número de arestas necessárias a serem removidas para tornar o grafo desconexo. Além disso, há uma relação entre $a(G)$ com a performance de processos dinâmicos em grafos vide Wang e Mieguem [47]. Nesta linha, existem diversos trabalhos que buscam aumentar a conectividade algébrica de um grafo, como por exemplo Nagarajan *et al* [33], Wei *et al* [48], Alenazi *et al* [2], Kolokolnikov [31], Wang e Mieguem [47], entre outros.

Recentemente, diversos trabalhos vêm sendo apresentados nesta área, com objetivos variados, desde análises topológicas do grafo, estudos sobre vulnerabilidade,

confiabilidade, até otimização de fluxo e afins. Enquanto a vulnerabilidade de uma rede mede quão frágil ela é mediante a ataques que possam isolar um, ou um subconjunto de vértices ou arestas, a confiabilidade do grafo que modela uma rede é a probabilidade desta rede permanecer conexa após a remoção de um ou de um subconjunto de vértices e/ou arestas. Portanto, para fins de aplicações relacionadas a grafos, a confiabilidade de uma rede é um importante parâmetro para tomada de decisão. Trabalhos relacionados a esse tema podem ser vistos em Silva [42], Teixeira *et al* [44], Jamakovic e Uhlig [27], Shpungin [41] e outros.

Assim, este trabalho tem como objetivo analisar a relação entre o aumento da conectividade algébrica em um grafo e o incremento no valor de sua confiabilidade a partir da inserção de uma aresta. Para isso, são, primeiramente, estudadas diversas estratégias que buscam aumentar o valor da conectividade algébrica de uma rede a partir da inserção de arestas no grafo. Posteriormente, é realizada uma análise a respeito da relação entre o aumento no valor deste parâmetro espectral e o impacto no aumento da confiabilidade da rede, que é uma medida probabilística. Com isso, é possível verificar se de fato existem ganhos em termos de confiabilidade a partir de métodos que buscam aumentar o valor da conectividade algébrica.

1.1 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA

Conforme dito anteriormente, existem diversos sistemas reais que podem ser modelados por redes e estas, por sua vez, representadas por grafos. Dentre esses casos, existem exemplos de redes cuja capacidade de se manter conexa é essencial para o funcionamento do sistema. Por exemplo, o caso de redes de linhas aéreas, nas quais os vértices são representados por localidades e as arestas são representadas por rotas que conectam dois locais distintos, ou no caso de linhas de transmissão de energia, rodovias, sistemas de saúde, telecomunicações, entre outros. É importante que no caso de falha de uma ou mais arestas ainda haja pelo menos um caminho que ligue todos os vértices da rede, garantindo sua conexidade. Esses são casos aplicados nos quais existe a possibilidade de se inserir uma nova aresta no grafo, seja através da criação de uma nova rota aérea, ou através da construção de uma nova linha de transmissão na rede, de

modo que se aumente a probabilidade da rede permanecer conexa após a falha de uma ou mais arestas.

Sendo assim, encontrar um método eficaz, capaz de identificar dentre todas as possibilidades de inclusão de arestas, aquela que irá prover o maior incremento na confiabilidade da rede, permitirá que casos futuros possam se pautar neste método para eventuais tomadas de decisão. Isto é importante, pois conforme o tamanho da rede, a análise de todas as possíveis inserções de arestas requer $\binom{n}{2} - m$ iterações, onde n indica o número de vértices e m o número de arestas do grafo. Além disso, o cálculo da confiabilidade de uma rede também é computacionalmente custoso, visto que depende da enumeração de todas as possíveis combinações de arestas do grafo, o que é da classe *NP-Hard*, conforme demonstrado por Shpungin [41] Isso torna demasiadamente demorado o cálculo deste parâmetro para todas as possibilidades de inclusão de arestas em redes grandes.

Existem diversos estudos na literatura que mostram o comportamento da conectividade algébrica após a inserção de uma nova aresta, como pode ser visto em Sydney et al [43], Wang e Mieghem [47], Barik e Pati [5], entre outros. Além disso, existem outros trabalhos que analisam o comportamento da confiabilidade de uma rede também após a inserção de uma nova ligação entre vértices, como em Silva [42] e Lyra e Oliveira [34]. No entanto, há uma escassez de estudos que verificam a relação entre estes dois importantes parâmetros a partir da inserção de novas arestas. É nesta linha de pesquisa que este trabalho se insere.

1.2 OBJETIVOS

Desta forma, o objetivo principal dessa pesquisa é analisar a relação entre o aumento da confiabilidade de uma rede a partir de estratégias que visam o aumento no valor da conectividade algébrica do grafo a partir da inserção de novas arestas. Para atingir esta finalidade os seguintes pontos serão analisados:

i. Identificar as melhores estratégias de inclusão de arestas em um grafo a fim de gerar o maior aumento no valor da conectividade algébrica,

baseadas em Medidas de Centralidade e alguns outros parâmetros espectrais de uma rede;

ii. Analisar a relação do aumento da confiabilidade da rede após a inserção de uma nova aresta, conforme os critérios definidos no item (i);

iii. Inter-relacionar o aumento no valor da conectividade algébrica com o aumento no valor da confiabilidade da rede após a inserção de uma nova aresta e verificar a correlação desses parâmetros.

1.3 METODOLOGIA

Os resultados provenientes de testes computacionais apresentados neste trabalho são realizados através da linguagem de programação Python, utilizando também o software matemático CoCalc (chamado até maio de 2017 de SageMath), que possui um amplo pacote de aplicações para grafos e teoria espectral de grafos. O CoCalc é um software matemático de código aberto desenvolvido sob a licença GPL (General Public License) e inclui pacotes de álgebra, cálculo, teoria dos números, teoria dos grafos, entre outros, podendo ser acessado pelo endereço www.cocalc.com.

Para compor os experimentos computacionais, além da geração de redes aleatórias a partir do CoCalc, também foram realizados testes em redes reais provenientes da base de dados Topology Zoo. O Topology Zoo é um projeto que visa levantar dados e a topologia de redes reais de diversos países. Atualmente, a plataforma conta com mais de duzentas e cinquenta redes, cuja maior parte pode ser visualizada de forma interativa, conforme a disposição geográfica dos vértices. Esse projeto é apoiado pelo governo australiano e pela Universidade de Adelaide e pode ser acessada pelo endereço www.topology-zoo.org [45].

Todos os experimentos computacionais foram gerados em um *notebook* do modelo Dell Inspiron 14R 3350, com processador Intel Core™ i5, sistema operacional Windows 7 Ultimate de 64 *bits* e 6GB de memória RAM.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho é estruturado em cinco capítulos. O Capítulo 2 apresenta os conceitos e teoremas fundamentais que embasam o desenvolvimento desta dissertação. Primeiramente, são apresentados os resultados sobre grafos, teoria espectral de grafos, medidas de centralidade e, por fim, é realizada uma abordagem sobre confiabilidade de redes. Já no Capítulo 3, alguns trabalhos importantes que apresentam teorias recentes que servem de base para o desenvolvimento desta proposta de dissertação, são abordados.

No Capítulo 4 há o desdobramento em três seções. Na Seção 4.1, são realizados testes computacionais de inserção de arestas em grafos com poucos vértices e desta forma, é possível começar a verificar alguns indícios de correlação, ou não, entre $a(G)$ e a confiabilidade da rede, bem como particularidades que possam, porventura, ser encontradas em redes com menor número de vértices. A Seção 4.2. tem objetivo similar, no entanto visa a realização de testes em redes reais com maior número de vértices, obtidas da base de dados de redes Topology Zoo. Já a Seção 4.3. tem como intenção a análise da correlação entre o incremento na conectividade algébrica e o aumento na confiabilidade da rede em redes que possuem a particularidade de possuírem vértices universais.

Por fim, o Capítulo 5, além de resumir os resultados obtidos no Capítulo 4, também apresenta as limitações nas quais esta pesquisa se deteve e enseja novos trabalhos que podem ser desenvolvidos a partir dos resultados encontrados nesta dissertação.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo são apresentados conceitos preliminares a respeito da Teoria dos Grafos, Teoria Espectral dos Grafos, Confiabilidade de Redes e Medidas de Centralidade que se encontram em Diestel [15], Bollobás [8], Biggs [7], Bondy e Murty [10], Godsil e Royle [21], Shpungin [41] e Freeman [18]. A apresentação destes conceitos é fundamental, tanto para o entendimento das demais seções, como também para uma melhor compreensão dos trabalhos relacionados ao tema da dissertação que são apresentados no Capítulo 3.

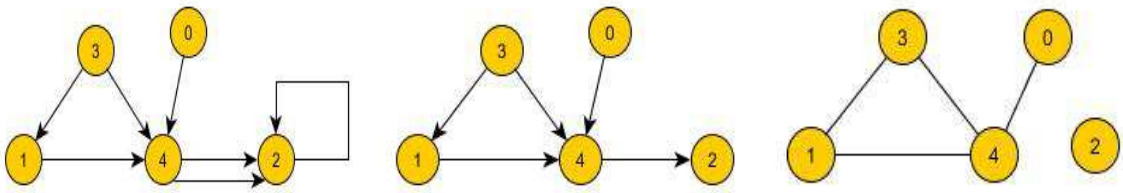
2.1 TEORIA DOS GRAFOS

Um grafo é um par ordenado $G = \big(V(G), E(G)\big)$ simplesmente denotado por $G = (V, E)$ constituído por um conjunto finito e não vazio V cujos elementos são denominados vértices (também chamados de nós ou pontos) e um conjunto E de pares não ordenados de vértices, denominado *links* ou linhas ou arestas. As cardinalidades dos conjuntos V e E são denotadas por $|V|$ e $|E|$, respectivamente.

Dado um grafo G, representamos seu conjunto de vértices por $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e o conjunto de arestas por $E = \{\{v_i, v_j\} \mid v_i, v_j \in V\}$, ou simplesmente $E = \{v_i v_j \big| v_i, v_j \in V\}$. A ordem de G é $|V| = n$ e o tamanho de G é $|E| = m$. Caso G não possua arestas, dizemos que G é o grafo vazio. Duas arestas em G são denominadas adjacentes se possuem um vértice em comum, caso contrário são não adjacentes. Dois vértices v_ie v_j são denominados adjacentes ou vizinhos se $v_i v_j \in E$, caso contrário são ditos não adjacentes. Dado $v_i \in V$ as adjacências de v_i são os elementos do conjunto $N(v_i) = \{v_j \in V \mid v_i v_j \in E\}$ e o grau de v_i, denotado por $d(v_i)$ ou, simplesmente d_i, é a cardinalidade de $N(v_i)$, ou seja, $d_i = |N(v_i)|$. Os graus mínimo e máximo de G, denotados por $\delta(G)$ e $\Delta(G)$, respectivamente, são $\delta(G) = \min\{d(v_i) | v_i \in V\}$ e

$\Delta(G) = \max\{d(v_i)|v_i \in V\}$. Se $d(v_i) = 0$, dizemos que v_i é um vértice isolado e se $d(v_i) = n - 1$, dizemos que v_i é um vértice universal.

Quando uma aresta liga um vértice a ele mesmo ela é denominada de laço (ou loop). Já, quando mais de uma aresta liga um mesmo par de vértices ela é denominada aresta paralela, ou múltipla, e o grafo é denominado multigrafo. Quando as arestas possuem algum tipo de orientação, o grafo é denominado orientado ou direcionado e as suas arestas são também conhecidas como arcos. Neste caso, o ponto inicial é o vértice do qual o arco parte e o ponto final é o vértice no qual o arco chega. Quando não existem orientações nas arestas, o grafo é denominado não orientado ou não direcionado. Um grafo é denominado valorado quando possui valores associados as suas arestas. Os grafos que não possuem laços ou arestas paralelas são denominados grafos simples. A partir de agora a expressão *grafo* será referente a grafos simples e não orientados e casos diferentes serão apresentados de forma explícita. A Figura 2.1 apresenta exemplos de grafos orientados e simples.



(a) Grafo com laço e aresta paralela (b) Grafo direcionado (c) Grafo simples

Figura 3.1: Exemplos de grafos

Se todos os vértices de G possuem o mesmo grau k, então G é denominado k-*regular* e quando $k = n - 1$, G é denominado grafo completo, denotado por K_n. O grafo complementar de G, denotado por $\bar{G}(\bar{V}, \bar{E})$, é tal que $\bar{V} = V, \bar{E} \cap E = \emptyset$ e $\bar{E} \cup E = E(K_n)$. O grau médio de G, denotado por $\bar{d}(G)$ é definido pela equação (1):

$$\bar{d}(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v) = \frac{2m}{|V|} = \frac{2m}{n} \qquad (1)$$

Pela equação (1), é evidente a relação $\delta(G) \leq \bar{d}(G) \leq \Delta(G)$. Enquanto o grau médio expressa a relação do grau por vértice, em alguns casos também é importante conhecer a densidade do grafo, denotada por $\varepsilon(G)$, dada pela equação (2):

$$\varepsilon(G) = \frac{|E|}{|V|} = \frac{m}{n} \qquad (2)$$

De (1) e (2) temos que $\varepsilon(G) = \frac{\bar{d}(G)}{2}$.

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas que começa e termina em algum vértice do grafo. O passeio é denominado aberto quando o vértice final é diferente do inicial e denominado fechado, caso contrário. Já a cadeia, ou trilha, é um passeio no qual não há repetição de arestas. Um caminho com n vértices é uma cadeia sem repetição de vértices, ou seja, um passeio sem repetição de vértices e arestas, o qual é denotado por P_n. Um caminho geodésico é aquele caminho formado pelo menor número de arestas que conectam um vértice de origem e um vértice de destino. Dados u e $v \in V$, a distância geodésica entre u e v, denotado por $d(u, v)$, é o comprimento do caminho geodésico que liga u a v.

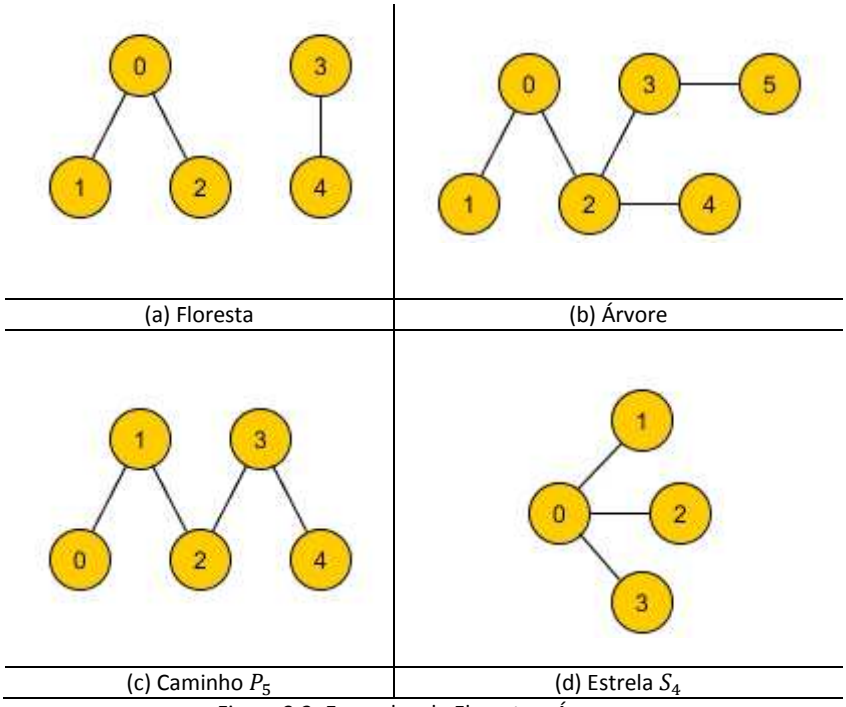
Um ciclo com n vértices, denotado por C_n, é um caminho onde o ponto inicial coincide com o ponto final. Um grafo é denominado conexo quando existe pelo menos um caminho que liga todos os pares de vértices, caso contrário, é denominado desconexo. Uma árvore é um grafo conexo e sem ciclo. Um grafo acíclico é um grafo sem ciclos. Uma floresta é um grafo cujas componentes conexas são árvores.

O grafo $G_S = (V_s, E_S)$ é denominado subgrafo de G se $V_s \subseteq V, E_S \subseteq E$. O subgrafo G_S é denominado subgrafo próprio de G quando: $V_s \subseteq V \; e \; E_S \subset E$ ou $V_s \subset V \; e \; E_S \subseteq E$; quando $V_s = V \; e \; E_S \subseteq E$, G_S é denominado subgrafo parcial ou gerador de G. G_S é subgrafo induzido de G se dois vértices de G_S adjacentes em G são necessariamente adjacentes em G_S.

Um grafo G é denominado bipartido quando V pode ser particionado em dois conjuntos disjuntos V_1 e V_2, tal que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ e $V_1 \cup V_2 = V$, existindo somente arestas que ligam vértices de V_1 aos vértices de V_2 e vice-versa. O grafo bipartido é denominado completo quando todos os vértices de V_1 estão ligados a todos os vértices

de V_2, sendo denotado por $K_{p,q}$ onde$|V_1| = p$ e $|V_2| = q$. Uma estrela com n vértices, denotada por S_n é um grafo bipartido completo tal que $|V_1| = 1$ e $|V_2| = n - 1$.

Na Figura 2.2 são apresentados alguns exemplos de floresta e árvores.



(a) Floresta (b) Árvore

(c) Caminho P_5 (d) Estrela S_4

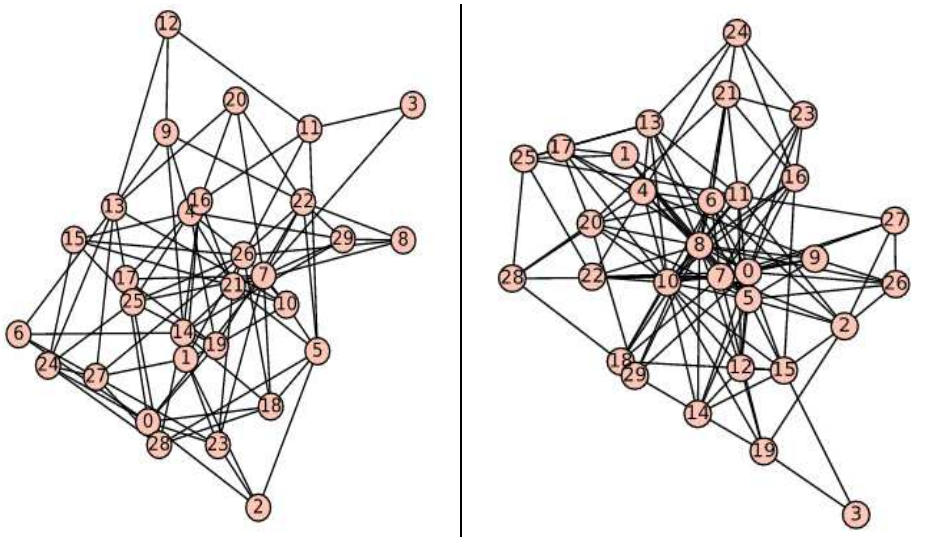
Figura 3.2: Exemplos de Floresta e Árvores

A conectividade de vértices, denotada por $k(G)$, é o menor número de vértices que devem ser removidos que tornam G desconexo. Analogamente, definimos a conectividade de arestas, denotada por $\lambda(G)$, como sendo o menor número de arestas que ao serem removidas tornam G desconexo.

Para a compreensão de algumas questões que são abordadas neste trabalho também é importante o conhecimento a respeito de alguns tipos de grafos aleatórios amplamente estudados na literatura. O primeiro modelo, conhecido por Erdös-Rényi foi proposto por Erdös e Rényi em 1959 e é criado a partir de dois parâmetros: n que indica

o número de vértices do grafo e p, que é a probabilidade independente de existência de cada aresta, vide Erdös [16]. Este grafo aleatório é denotado por $G(n,p)$.

O segundo modelo de grafo aleatório é denominado Barabasi-Albert (BA), que é normalmente associado a redes sociais, indicando a existência de um número pequeno de nós conectados a muitos outros vértices da rede e um grande número de vértices com poucas ligações, como o exemplo da *world-wide web* Albert *et al* [1]. Este modelo também é conhecido como redes livres de escala (*scale free network*). A construção deste modelo acontece da seguinte forma: a rede inicia com um determinado número de vértices e a cada iteração um novo vértice é adicionado ao sistema e ligado a k diferentes vértices, já existentes na rede. A probabilidade de escolha do vértice ao qual o novo vértice é ligado depende do grau, da seguinte maneira: vértices com maior grau têm maior probabilidade de serem escolhidos. Dessa forma, os parâmetros exigidos para criação de uma rede aleatória desse tipo são o número de vértices, n, e o número de arestas a ser conectada a cada novo vértice, k. A Figura 2.3 exibe um exemplo destes grafos gerados pelo CoCalc.



(a) Erdös-Rényi (n=30, p=0,2) | (b) Barabasi-Albert (n=30, m=5)

Figura 3.3: Exemplos de grafo Erdös-Rényi e Barabasi-Albert

2.2 ÁLGEBRA LINEAR E TEORIA ESPECTRAL DOS GRAFOS

Embora a representação geométrica de um grafo seja conveniente para a visualização do mesmo, esta não é a forma mais adequada para o tratamento computacional dos problemas que envolvem a Teoria dos Grafos. Para facilitar esse tratamento computacional, podemos representar grafos por matrizes, como por exemplo: Matriz de Adjacência, Matriz de Incidência, Matriz Laplaciana, Matriz Distância e Matriz Laplaciana sem sinal. A Teoria Espectral de Grafos tem como objetivo obter propriedades de grafos através de matrizes associadas a eles. Nesta seção, apresentamos os resultados básicos de Álgebra Linear e Teoria Espectral para a compreensão do tema aqui proposto, que se encontram principalmente em Hoffman [25], Biggs [7], Godsil e Royle [21], Abreu *et al* [3], Abreu *et al* [4] e Horn [26].

Definição 2.2.1. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Um autovalor de A é um escalar tal que $Ax = \lambda x$, para todo $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Todo $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfaz a esta equação é denominado um autovetor de A associado ao autovalor λ. Assim, λ é um autovalor de A se, e somente se, o sistema linear homogêneo $(A - \lambda I_n)x = 0$ tem solução não trivial, onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

Definição 2.2.2. Seja I_n a matriz identidade de ordem n. O polinômio característico de grau n associado à A, é definido por

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

Os autovalores de A são as raízes do polinômio característico de A e, portanto, A tem n autovalores não necessariamente distintos. O número de vezes que um autovalor λ é raiz do polinômio é denominado multiplicidade algébrica e é denotado por $m(\lambda(A))$. O traço da matriz A é a soma dos elementos da diagonal principal que é igual a soma dos autovalores dessa matriz.

O teorema apresentado a seguir trata das raízes do polinômio característico associado a matrizes simétricas.

Teorema 2.2.1. Todas as raízes do polinômio característico associado a uma matriz simétrica são números reais.

Definição 2.2.3. Uma matriz A de ordem n é denominada semidefinida positiva se, e somente se, todos os seus autovalores são maiores ou iguais a zero.

Definição 2.2.4. O espectro de uma matriz A simétrica, denotado por $spect(A)$ é uma matriz $2\ x\ s$, tal que a primeira linha tem como entrada os autovalores distintos em ordem não crescente e a segunda linha com as respectivas multiplicidades algébricas de cada autovalor, ou seja,

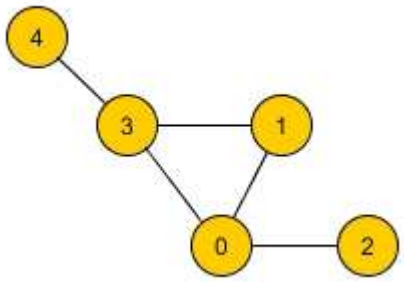
$$spect(A) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_s \\ m(\lambda_1(A)) & \dots & m(\lambda_s(A)) \end{bmatrix}$$

Para finalizar essa seção alguns conceitos e resultados sobre Teoria Espectral dos Grafos são apresentados.

Definição 2.2.5. A matriz de adjacência de $G, A(G)$, é uma matriz quadrada de ordem n cujas entradas são definidas por:

$$a_{ij=} \begin{cases} 1, se\ \{v_i, v_j\} \in E\ para\ v_i, v_j \in V; \\ 0, caso\ contrário \end{cases}$$

A Figura 2.4 exibe um grafo G e sua respectiva matriz de adjacência.



$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 3.4: G e sua matriz de adjacência A(G).

Definição 2.2.5. A matriz Laplaciana de G, denotada por $L(G)$, é uma matriz simétrica, definida por:

$$L(G) = D(G) - A(G),$$

onde $D(G)$ é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são os graus dos vértices de G e $A(G)$ sua matriz de adjacência.

Se $\mu_1(G) \geq \cdots \geq \mu_{n-1}(G) \geq \mu_n(G)$ são os autovalores de $L(G)$, então o espectro de $L(G)$ é:

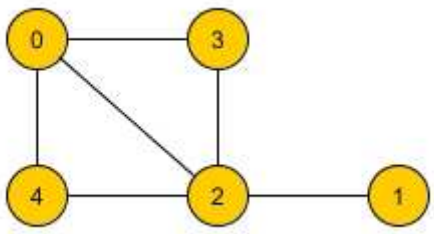
$$spect(L(G)) = [\mu_1(G), \quad \ldots, \quad \mu_{n-1}(G), \quad \mu_n(G)]$$

De acordo com Fiedler [17], a matriz Laplaciana é positiva semidefinida e $\mu_n(G) = 0$.

Definição 2.2.6. O segundo menor autovalor de $L(G)$, denominado conectividade algébrica de G, é denotado por $a(G) = \mu_{n-1}(G)$ e o autovetor associado à $a(G)$ é denominado vetor de Fiedler.

Em Rocha [38], podem ser vistos detalhes sobre as propriedades do vetor de Fiedler.

A Figura 2.5 exibe o grafo G com sua respectiva matriz Laplaciana e o valor da sua conectividade algébrica.



$$L(G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad a(G) = 1$$

Figura 3.5: G e sua conectividade algébrica

A conectividade algébrica de um grafo é importante, pois está associada a diversos invariantes da Teoria dos Grafos. Justel *et al* [28] trata especificamente sobre a conectividade algébrica em alguns tipos de árvores.

A seguir são apresentados alguns resultados envolvendo esse parâmetro que são utilizados no desenvolvimento desta dissertação e podem ser vistos em Haemers [23] e Fiedler [17].

Proposição 2.2.7. Seja G um grafo. Então G é conexo se, e somente se, $a(G) \neq 0$.

Teorema 2.2.3. Seja G um grafo com n vértices e seja $e \in E$. Então: $\mu_j(G) \leq \mu_j(G') \leq \mu_{j+1}(G)$ para todo $j \in \{1,2,\dots,n-1\}$, onde G' é obtido de G pela inserção da aresta e.

Teorema 2.2.4. Seja $G = (V, E)$ um grafo, tal que $V = V_1 \cup V_2$, e $G_i (i = 1,2)$, um subgrafo gerado por V_i. Então

$$a(G) \leq \min(\, a(G_1) + |V_2|\,, a(G_2) + |V_1|\,)$$

Teorema 2.2.5. Seja G um grafo não-completo. Então $a(G) \leq k(G)$.

Como $k(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$, pelo Teorema 2.2.5, obtemos a seguinte desigualdade:

$$a(G) \leq k(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G). \qquad (8)$$

Considere o grafo G da Figura 2.6. Neste caso, $k(G) = 1,\ \lambda(G) = 2, \delta(G) = 3$ e $a(G) = 0{,}43$.

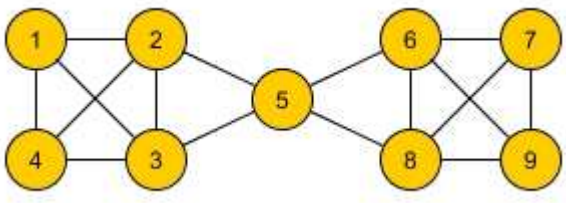


Figura 3.6: Grafo G

A Tabela 2.1 apresenta os valores de $a(G)$, $k(G)$ e $\lambda(G)$ para algumas famílias de grafos. É importante verificar que no caso de K_n temos que $a(G) > k(G)$.

Tabela 3.1: Relações entre conectividade algébrica, conectividade de vértice e de aresta

Grafo	$\boldsymbol{a(G)}$	$\boldsymbol{k(G)}$	$\boldsymbol{\lambda(G)}$
P_n	$2\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$	1	1
C_n	$2\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)$	2	2
S_n	1	1	1
K_n	n	$n-1$	$n-1$

Fonte: Baseado em Fiedler [17] - p.304

2.3 CONFIABILIDADE DE REDES

Conforme visto, grafos podem representar estruturas reais, tais como redes de telecomunicações, de transporte, processos biológicos, sociais e etc. Portanto, passa a ser extremamente importante a análise da topologia das redes como também, a probabilidade de uma rede permanecer conexa após uma eventual falha de vértices ou arestas, o que é definido como a confiabilidade da rede.

Na literatura são encontrados problemas com respeito à confiabilidade de redes que abordam quatro aspectos: (i) apenas as arestas podem falhar e os vértices são confiáveis, vide Colbourn [52]; (ii) apenas os vértices podem falhar e as arestas são confiáveis, vide Goldschmidt *et al* [22]; (iii) tantos os vértices como as arestas podem falhar, mostrado em Shpungin [41] ou (iv) no caso de estudos para otimização de uma função objetivo que visa maximizar a confiabilidade da rede (vide Chaves [59]). Nesta dissertação iremos nos deter somente ao caso de falhas em arestas. Para entender a forma de obtenção da confiabilidade de uma rede apresentamos alguns conceitos preliminares.

Definição 2.3.1. O conjunto de corte de arestas de cardinalidade λ (ou corte de arestas) é um conjunto de λ arestas cuja remoção torna o grafo desconexo ou trivial. O número de conjunto de cortes de arestas de cardinalidade λ em G é denotado por $m_\lambda(G)$.

Um grafo é k-aresta-conexo se, e somente se, todo conjunto de corte de arestas que torna o grafo desconexo possui no mínimo k arestas, isto é, a conectividade de arestas de G é maior ou igual a k. De maneira análoga, define-se um conjunto de corte de vértices de cardinalidade k e $m_k(G)$ denota o número de conjuntos de corte de vértices de cardinalidade k (Haray [24]).

A Figura 2.7 apresenta dois grafos, G e H, com mesmo número de vértices e de arestas.

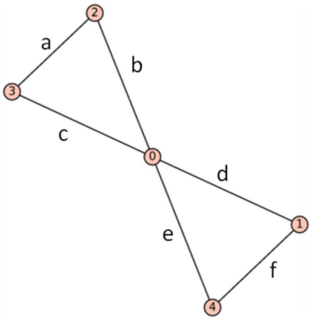
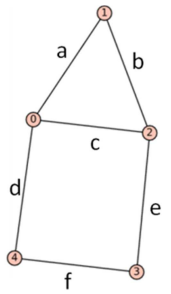
<table>
<tr><td>
</td><td>$\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{d,e\},\{d,f\},\{e,f\}$</td></tr>
<tr><td>(a) Grafo G com $n = 5$ e $m = 6$</td><td>(b) Conjuntos de corte de aresta de cardinalidade 2 e $m_2(G) = 6$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$\{a,b\},\{d,f\},\{e,f\},\{d,e\}$</td></tr>
<tr><td>(c) Grafo H com $n = 5$ e $m = 6$</td><td>(d) Conjuntos de corte de aresta de cardinalidade 2 e $m_2(H) = 4$</td></tr>
</table>

Figura 3.7: *G, H* e seus conjuntos de corte de cardinalidade $\boldsymbol{\lambda = 2}$

Como pode ser observado, a topologia da rede influencia no cálculo do número de conjuntos de corte.

Seja G um grafo que modela uma rede onde os vértices são confiáveis e cada aresta possui uma probabilidade de falha associada, denotada por ρ_e, a confiabilidade da rede representa a probabilidade de G permanecer conexo após a falha de uma ou mais arestas.

No caso em que todas as arestas possuem a mesma probabilidade de falha, denotamos essa probabilidade de falha simplesmente por ρ. É importante notar que neste caso a probabilidade de falha entre arestas é independente duas a duas, ou seja, a falha de uma aresta não implica na probabilidade de falha das demais. Com isso, com o objetivo de calcular a confiabilidade da rede devemos computar a probabilidade de cada estado de funcionamento da rede, ou seja, que o grafo que a modela seja conexo, e posteriormente somar os resultados obtidos. Assim, o número total de possíveis estados é 2^m e a probabilidade de ocorrência de cada estado da rede é dado pelo seguinte produtório:

$$\prod_{e \in E'} (1 - \rho_e) \prod_{e \in (E \setminus E')} \rho_e \qquad (6)$$

onde E é o conjunto de arestas do grafo e E' é o conjunto formado pelas arestas do grafo que funcionam. Quando todas as arestas possuem a mesma probabilidade de falha ρ a confiabilidade da rede pode ser obtida pela seguinte expressão.

$$R(G, \rho) = \sum_{i=n-1}^{m} S_i (1 - \rho)^i \rho^{m-i} \qquad (7)$$

onde S_i é o número de subgrafos conexos de G com i vértices e m o número de arestas de G.Também é importante notar que Kelmans [29] apresenta a fórmula da não-confiabilidade, isto é, $1 - R(G, \rho)$, através da seguinte expressão:

$$P(G, \rho) = \sum_{i=\lambda}^{m} m_i \rho^i (1 - \rho)^{m-i} \qquad (8)$$

onde m_i é o número de conjuntos de cortes de arestas de cardinalidade de i e λ é a conectividade de arestas de G. Utilizando-se (7) e (8), é fácil observar que $P(G, \rho) + R(G, \rho) = 1$. Em ambos os casos o cálculo da confiabilidade e da não-confiabilidade assume um caráter combinatório, o que o torna computacionalmente custoso e, conforme demonstrado por Shpungin [41], é da classe *NP-Hard.* Com o objetivo de

simplificar esse processo, Teixeira *et al* [44] mostraram a existência na literatura de uma aproximação da função $P(G,\rho)$ para valores de $\rho \leq 1/2$, por uma função $\hat{P}(G,\rho)$, dada pela seguinte expressão:

$$\hat{P}(G,\rho) = m_{\lambda}\rho^{\lambda}(1-\rho)^{m-\lambda} + m_{\lambda+1}\rho^{\lambda+1}(1-\rho)^{m-\lambda-1} \qquad (9)$$

E, então, tem-se que $\hat{R}(G,\rho) = 1 - \hat{P}(G,\rho)$.

Para o grafo G exibido na Figura 2.7 (a), fazendo $\rho = 0{,}5$ temos que $m_2 = 6$ e que $m_3 = 20$ e portanto,

$$\hat{P}(G,0{,}5) = 6(0{,}5)^2(1-0{,}5)^{6-2} + 20(0{,}5)^3(1-0{,}5)^{6-2-1}$$

$$\hat{P}(G,0{,}5) = 0{,}406$$

e consequentemente a confiabilidade da rede modelada por G é $1 - \hat{P}(G,0{,}5) = \hat{R} = 0{,}594$.

2.4 NÚMERO ISOPERIMÉTRICO E *TOUGHNESS*

Aproveitaremos a abordagem do conceito de conjunto de corte de arestas para apresentar suas relações com o número isoperimétrico. Seja $G = (V,E)$ e seja $S \subseteq V$. Tem-se o conjunto de corte de arestas de G, denotado por δS, é definido por $\delta S = \{(u,v) \in E / u \in S \; e \; v \in V - S\}$. Com isso, se faz necessário encontrar um δS mínimo, vide Abreu [56]. O parâmetro número isoperimétrico (conhecido também em inglês como *conductance number*) do grafo G, denotado por $i(G)$, é baseado na cardinalidade de S e de δS, definido da seguinte maneira:

$$i(G) = min_{S \subseteq V} \frac{|\delta S|}{|S|}, \qquad |S| \leq 2$$

Alguns trabalhos também associam o número isoperimétrico com a conectividade algébrica do grafo, conforme mostra a Tabela 2.2. Isso permite mostrar

que, de fato, a literatura já apresenta algumas relações, ainda que não de forma direta, entre a conectividade algébrica e a confiabilidade de redes, uma vez que esta medida tem como *input* o conjunto de corte de arestas do grafo.

Tabela 3.2: Relações entre o número isoperimétrico e conectividade algébrica

Relação entre $i(G)$ e $a(G)$	Fonte
$\frac{a(G)}{2} \leq i(G)$	Mohar [53]
$i(G) \leq \sqrt{a(G)(2\Delta(G) - a(G))}$	Mohar [53]
$a(G) \leq \Delta(G) - \sqrt{\Delta(G)^2 - i(G)^2}$	Berman e Zhang [54]
$a(G) \leq \frac{n\lvert\delta S\rvert}{(n - \lvert S\rvert)\lvert S\rvert}$	Alon e Milan [55]

(Baseado em Abreu [56])

Um invariante importante e cujo conceito é próximo ao conceito de confiabilidade da rede é o *Toughness*, apresentado por Chvátal [57] em 1972. O autor define este invariante como o maior número real *t* tal que a remoção de quaisquer *s* vértices de G resulta em um grafo que é ou conexo ou tem no máximo $\frac{s}{t}$ componentes conexas. Por exemplo, um grafo é 1-*though* quando o número de componentes conexas geradas a partir da remoção de um conjunto de *s* vértices é também igual a *s*.

Segundo o próprio autor, o *toughness* mede de forma simples o quanto as várias componentes de um grafo se mantêm conectadas e, posteriormente, apresenta a relação desta medida com a existência de caminhos hamiltonianos. Um caminho hamiltoniano é um caminho que começa no vértice v_i e termina no vértice v_j, passando por todos os vértices do grafo.

Portanto, seja G um grafo, t um número real e seja $\gamma(G)$ o número de componentes conexas de G, tal que a implicação $\gamma(G - S) > 1 \Rightarrow |S| \geq t\gamma(G - S)$ seja válida para cada conjunto S de vértices de corte de G. Então, G é t-*tough*. É este t que é denominado de *toughness* de G, denotado por $t(G)$, e definido por

$$t(G) = \min\{\frac{|S|}{\gamma(G-S)}\},$$

onde S representa todos os conjuntos de corte de vértices de G. Conforme Chvátal [57], o *toughness* é um invariante não decrescente cujo valor é igual a 0 caso G seja desconexo. Uma vez definido o *toughness* de vértices, o autor apresenta também o *toughness* de arestas, denotado por $t^*(G)$, definido da seguinte maneira

$$t^*(G) = \min\{\frac{|X|}{\gamma(G-X)}\},$$

onde X representa todos os conjuntos de corte de arestas de G. Um importante teorema demonstrado pelo autor relaciona $t^*(G)$ com a conectividade de arestas de G, conforme apresentado a seguir cuja demonstração pode ser encontrada em Chvátal [57].

Teorema 2.3.1. Seja G um grafo. Então $t^*(G) = \frac{\lambda(G)}{2}$

2.5 MEDIDAS DE CENTRALIDADE

A centralidade em redes sociais foi introduzida por Bavelas [6], onde o autor afirma que determinado ator em uma rede social está em uma posição mais central nela quando ele se encontra localizado em um caminho mais curto de comunicação entre outros pares de indivíduos. Nesta seção apresentamos as medidas de centralidade de grau, de proximidade e de intermediação, que são utilizadas neste trabalho, e que podem ser encontradas em Freeman [18], Shaw [40], Bavelas [6], Moxley e Moxley [32], Freitas [19] e Nooy *et al* [35].

2.4.1.Medida de Grau (*Degree*)

De acordo com Freeman [18] foi Nieminem em 1974 quem surgiu com o conceito de centralidade de grau, que nada mais é do que a contagem do número de

vizinhos de um vértice do grafo. Assim, a centralidade de grau de um vértice nada mais é do que o seu grau e o vértice mais central é o que possui o maior grau. A equação (10) apresenta a definição desta medida de forma normalizada, uma vez que para dois grafos com ordens distintas um mesmo valor de centralidade de grau terá representatividade diferente em cada uma das redes, o que pode impossibilitar a comparação desta medida.

$$c'_D(v_k) = \frac{d(v_k)}{n-1} \qquad (10)$$

2.4.2. Medida de Proximidade (*Closeness*)

De acordo com Freeman [18] a centralidade de proximidade está relacionada com a distância de um dado vértice v_i aos demais vértices do grafo. Seja $d(v_i, v_j)$ a distância geodésica entre os vértices v_i e v_j em *G*. Assim, a medida de centralidade de proximidade do vértice v_i é dada por:

$$C_c(v_i) = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} d_G(v_i, v_j) \qquad (11)$$

Quanto menor o valor de $C_c(v_i)$ mais rapidamente o vértice v_i se comunicará com os demais vértices da rede, o que torna v_i mais central com relação a esta medida.

2.2.3.Medida de intermediação (*Betweeness*)

Enquanto as medidas apresentadas acima indicam quão alcançável um vértice é em uma rede, a de intermediação verifica o quanto um vértice pertence ao caminho geodésico, de outros dois pares quaisquer de vértices da rede. Essa é uma medida que analisa o quanto um vértice é importante na passagem de informação entre outros dois, vide Freeman (1977). A equação (12) apresenta a expressão para o cálculo da centralidade de intermediação do vértice v_k.

$$C_B(v_k) = \sum_{i<j} \frac{\sigma_{i,j}(v_k)}{\sigma_{i,j}} \quad i \neq j \neq k \quad (12)$$

onde $\sigma_{i,j}$ é o número de caminhos geodésicos que conectam os vértices i e j e $\sigma_{i,j}(v_k)$é o número de caminhos geodésicos que conectam os vértices i e j e que passam pelo vértice v_k. Como os caminhos geodésicos são aqueles mais comumente escolhidos, quanto maior for a centralidade de intermediação mais central o vértice em questão e este é um *link* entre partes distintas da rede.

3 TRABALHOS RELACIONADOS

Este capítulo tem como objetivo apresentar trabalhos existentes na literatura relacionados com a proposta desta dissertação. Na Seção 3.1 são apresentados alguns trabalhos que tratam do incremento no valor da conectividade algébrica a partir da inserção de uma nova aresta. A Seção 3.2 exemplifica a teoria apresentada na Seção 3.1, através de simulações em grafos aleatórios e em redes reais, com o objetivo de ratificar os resultados apresentados até então, bem como, trazer à luz algumas particularidades a respeito dos trabalhos existentes na literatura. Por fim, a Seção 3.3 mostra algumas relações já conhecidas na literatura entre a confiabilidade de redes e as medidas de centralidade.

3.1 VARIAÇÃO DE CONECTIVIDADE ALGÉBRICA

Conforme foi visto no Capítulo 2, o segundo menor autovalor associado à matriz Laplaciana de um grafo, denominado de conectividade algébrica e denotado por $a(G)$, é uma medida importante a respeito da conexidade do grafo que modela a rede. Os trabalhos na literatura que tem como objetivo o aumento deste parâmetro, através da inclusão de novas arestas ou através da troca de uma aresta por outra, previamente inexistente no grafo podem ser encontrados em Sydney et al [43], Wang e Mieghem [47], entre outros. Nesta seção são apresentados os principais resultados nesta linha.

Primeiramente, são apresentados os resultados que limitam o aumento da conectividade algébrica pela inserção de uma aresta no grafo.

Do Teorema do Entrelaçamento (Teorema 2.2.3) decorre que: dado um grafo G no qual a conectividade algébrica tem multiplicidade algébrica maior do que 1, tem-se que $a(G+e) = a(G)$, ou seja, a inserção de uma aresta no grafo não altera o valor da conectividade algébrica. Além disso, sabemos que $\sum_{i=1}^{n} \mu_i(G) = 2\,m$ e se m' é o número de arestas de $(G+e)$, então:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i(G+e) = 2\,m' = 2(m+1) = 2m+2$$

Logo, $\sum_{i=1}^{n}[\mu_i(G+e)-\mu_i(G)]=2$.

Portanto, são obtidos limites superior e inferior para aumento da conectividade algébrica a partir da inserção de uma aresta dado pela seguinte inequação:

$$0 \leq a(G+e)-a(G) \leq 2.$$

Assim, sabemos que independentemente da estratégica de adição de arestas a ser utilizada, o incremento da conectividade algébrica ao ser inserida uma aresta no grafo G é de no máximo duas unidades, quando comparado ao valor da conectividade algébrica de G. O teorema a seguir, devido a Barik e Pati [5], apresenta o caso no qual se tem o maior incremento da conectividade algébrica.

Teorema 3.1.1. Seja G um grafo conexo com n vértices e sejam v_i e v_j dois vértices não adjacentes em G. O maior aumento na conectividade algébrica ocorre se, e somente se, $G = K_n \backslash \{v_i, v_j\}$, isto é, G é o grafo completo menos uma aresta.

Sabemos também que como $a(G) \leq \delta(G)$, se existe $v \in V(G)$, tal que $d(v) = 1$, então $a(G) \leq 1$. De acordo com Das [14], impondo certas condições a v, conclui-se que $a(G) < 1$, conforme pode ser visto no Teorema 3.1.2.

Teorema 3.1.2. Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo com $n > 2$ vértices, tal que existe $v \in V$ com $d(v) = 1$. Então, $a(G) < 1$se v não é adjacente ao vértice de grau máximo em G.

Wang e Mieghem [47] mostraram que após uma aresta e ser inserida no grafo G entre os vértices v_i e v_j, os limites superior e inferior da conectividade algébrica de $G+e$, $a(G+e)$, são:

$$\min\left\{a(G)+\frac{\varepsilon\alpha^2}{\varepsilon+(2-\alpha^2)}, \mu_{n-2}(G)-\varepsilon\right\} \leq a(G+e) \leq \min\{\alpha^2+a(G),\ \mu_{n-2}(G)\},$$

onde $\alpha = |u_i - u_j|$, isto é, a diferença absoluta entre a *i-ésima* e a *j-ésima* componente do vetor de Fiedler de G, conforme definido na Seção 2.2 e μ_{n-2} é o terceiro menor autovalor da matriz Laplaciana de G e onde ε é dado por:

$$\varepsilon = \frac{\beta - 2}{2} + \left(\frac{(\beta-2)^2}{4} + \beta(2-\alpha^2)\right)^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

onde $\beta = \mu_{n-2}(G) - a(G) \geq 0$.

Com relação ao limite inferior de $a(G+e)$, o primeiro termo aumenta conforme ε também aumenta, enquanto o segundo termo diminui. O maior limite inferior pode ser obtido através da escolha de ε que torne ambos os termos da expressão iguais. Portanto, quanto maior α, menor será ε, o que irá aumentar o limite inferior de $a(G+e)$. Além disso, um maior α também irá contribuir para um possível aumento do limite superior. Logo, $a(G+e)$ tende a aumentar quando $\alpha = |u_i - u_j|$ também aumentar, vide Wang e Mieghem [47]. Este resultado é de fundamental importância para uma das estratégias de aumento da conectividade algébrica.

O artigo de Wang e Mieguem [47] tem como objetivo definir qual aresta deve ser incluída em um grafo de modo que a conectividade algébrica tenha o maior incremento possível. Como a busca exaustiva para a obtenção desta resposta é computacionalmente demorada, a depender da ordem do grafo, Wang e Mieguem propuseram comparar duas estratégias: (i) incluir uma aresta entre o vértice de menor grau e qualquer outro vértice aleatório do grafo; (ii) incluir uma aresta entre o par que possui a maior diferença $|u_i - u_j|$, onde $u_i e u_j$ correspondem a *i-ésima* e *j-ésima* componente do vetor de Fiedler. A seguir, apresentamos o porquê da escolha de tais estratégias.

Wang e Mieguem [47] iniciam o trabalho realizando uma investigação a respeito da relação entre o aumento da conectividade algébrica a partir da inserção de uma aresta entre os vértices v_i e v_j e as características topológicas destes vértices. Para isso, os autores utilizaram uma rede aleatória do tipo Erdös-Rényi ($G(n,p)$) e outra do tipo Barabasi-Albert (BA) a fim de explorar todos os aumentos de $a(G)$ com a inserção de uma nova aresta considerando as seguintes características dos vértices v_i e v_j: o grau; e a centralidade de intermediação.

Para ambos os grafos os autores verificam que o maior aumento de $a(G)$ ocorre quando um dos nós v_i ou v_j possui grau baixo ou baixa centralidade de intermediação, porém não encontraram correlação para o coeficiente de clusterização. Como existe correlação entre grau e centralidade de intermediação, isto é, o aumento de uma sempre está relacionado com o aumento da outra, os autores optaram somente pela estratégica da conexão de um vértice de grau baixo à qualquer outro vértice da rede, uma vez que a obtenção do grau de um vértice é computacionalmente mais rápida que a obtenção da centralidade de intermediação. É importante ressaltar que essa estratégia está relacionada ao Teorema 3.1.2, que mostra que o grau mínimo é um limitante superior para a conectividade algébrica.

Já a segunda estratégia proposta pelos autores prevê a adição de uma aresta entre os vértices não adjacentes que possuem o maior valor de $|u_i - u_j|$, a qual é baseada na teoria apresentada por esses mesmos autores no início deste capítulo, que mostra os limites de aumento da conectividade algébrica após a adição de uma aresta. Posteriormente, Wang e Mieghem [47] realizam 10^4 simulações de adição de arestas baseadas nestas estratégias em grafos Erdös-Rényi e BA e calculam os percentuais de aumento de $a(G)$. Eles concluíram que a estratégia (i), baseada no vértice de menor grau, é mais eficiente para grafos mais densos, como aqueles do tipo Erdös-Rényi, mas perde eficiência em grafos mais esparsos, uma vez que esses possuem muitos nós de grau baixo, como é o caso de redes do tipo BA. Os autores também afirmaram que embora a segunda estratégia seja geralmente melhor para a maior parte dos casos, ela possui complexidade $O(n^3)$, enquanto a primeira possui complexidade $O(n)$.

Em 2013, Sydney *et al* [43] utilizaram uma estratégia de realocação de aresta. A ideia dos autores era conseguir o maior incremento da conectividade algébrica através da remoção de uma já existente e posteriormente a inserção de uma nova aresta. A metodologia que utilizaram busca verificar: (i) qual aresta deve ser removida de forma que $a(G)$ tenha o menor decréscimo; e (ii) qual deve ser incluída para que $a(G)$ tenha o maior incremento. Para a resposta da segunda pergunta os autores indicaram o trabalho de Wang e Mieghem [47] e focaram sua pesquisa, portanto, na resposta da primeira questão, isto é, identificar qual aresta deve ser removida de tal forma que $a(G)$ tenha o menor decréscimo.

Com esse objetivo, Sydney *et al* [43] apresentaram os limites superior e inferior para a conectividade algébrica de um grafo G após a remoção de uma aresta, dados a seguir (Sydney *et al* [43] p. 5468 – 5469).

$$\min\left\{a(G) + \frac{\epsilon\alpha^2}{\alpha^2 + (-2-\epsilon)}, \mu_{n-2}(G) + \epsilon\right\} \leq a(G-e) \leq a(G) - \alpha^2$$

$$\epsilon = -[\frac{\xi+2}{2} + \left(\frac{(\beta+2)^2}{4} + \xi(\alpha^2-2)\right)^{\frac{1}{2}}]$$

$$\xi = \mu_{n-2}(G) - a(G)$$

onde $\alpha = |u_i - u_j|$ é a diferente entre a *i*-ésima e *j*-ésima componente do vetor de Fiedler de G e $\beta = \mu_{n-2}(G) - a(G) \geq 0$.

A melhor aresta a ser removida é aquela tal que a diferença $\alpha = |u_i - u_j|$ seja a menor dentre todas, ou seja, uma aresta que conecta dois vértices que são fortemente conectados e, posteriormente, inserir uma aresta tal que α seja o maior possível.

Chan e Akoglu [13] também propõem uma estratégia para aumento da robustez de um grafo através da adição e remoção de arestas, também baseado em Medidas Espectrais do grafo, através de uma estratégia de *edge rewire*, isto é, através da remoção de uma aresta e posterior inserção de uma nova. Para isso, os autores desenvolveram uma heurística que tem como objetivo identificar a aresta que ao ser inserida traz o maior aumento na robustez da rede e, posteriormente, selecionar a aresta que ao ser removida traz a menor redução da robustez da rede.

Também podem ser encontrados diversos trabalhos que utilizam heurísticas para o problema de maximização da conectividade algébrica, como em Ghosh e Boyd [20], cuja estratégia gulosa tem como objetivo adicionar *k* arestas, uma a uma, sendo essas arestas também baseadas no maior valor de α^2 e cujo algoritmo foi aperfeiçoado por Oliveira *et al* [36]. Com isso, podemos observar outros trabalhos que usam α^2 como uma estratégica para buscar o aumento da conectividade algébrica.

Alenazi *et al* [2] desenvolveram uma heurística baseada na adição de arestas em vértices que possuem o grau mínimo, porém levando em consideração um limite

orçamentário para criação destes novos links, dada uma distância entre cada par de vértices. Ou seja, dados todos os vértices com grau mínimo em uma rede, os autores decidiram aquele que deveria ser conectado a outro com base em um custo associado à inserção da aresta entre os vértices v_i e v_j, para todo $i, j \in V$, de forma a aumentar o máximo do valor da conectividade algébrica com o custo de inserção dentro do limite orçamentário imposto pelo problema. Além disso, Kirkland *et al* [30] apresentam um trabalho a respeito de grafos cuja conectividade algébrica é igual a conectividade de arestas.

Outro trabalho importante no que tange à maximização da conectividade algébrica pode ser encontrado em Mosk-Aoyama [58]. Neste estudo de otimização o autor mostra que o problema de adicionar um número específico de arestas em um grafo com o objetivo de maximizar a conectividade algébrica é da classe *NP-Hard*. Em sua modelagem de programação inteira, a função objetivo do problema de otimização leva em consideração a matriz de autovalores do grafo. A partir dela se constrói o problema, tal que dado um grafo original e um limite mínimo de aumento da conectividade algébrica, deve-se encontrar um conjunto mínimo de arestas que ao serem inseridas resultem no aumento da conectividade algébrica que seja pelo menos maior que o mínimo proposto na formulação do problema.

3.2 SIMULAÇÕES DAS ESTRATÉGIAS DE INSERÇÃO DE ARESTAS E O AUMENTO NA CONECTIVIDADE ALGÉBRICA

Conforme descrito na Seção 3.1, existem diversas estratégias que buscam aumentar a conectividade algébrica de um grafo após a inserção de uma aresta. Esta seção tem como objetivo realizar simulações de inserção de arestas em grafos aleatórios e em redes reais a fim de comparar os resultados obtidos com as estratégias de inserção de arestas mostradas na seção anterior.

Para isso, foram realizadas todas as possíveis inserções de arestas em alguns grafos aleatórios, bem como o cálculo da conectividade algébrica, do vetor de Fiedler e das medidas de centralidade do grafo original. Em cada novo grafo gerado após a inclusão de uma nova aresta, foi calculada a nova conectividade algébrica e o aumento

percentual sofrido por $a(G)$ após a inserção de uma nova ligação entre cada par de vértices. Com isso, é possível comparar como a inserção de novas arestas impacta na conectividade algébrica através da inserção de ligações entre vértices de grau baixo, entre vértices com baixos valores de centralidade e entre vértices com grande diferença de suas respectivas entradas do vetor de Fiedler. Essa análise será realizada para algumas redes aleatórias e, por fim, para uma rede real obtida da base de dados Topology Zoo [45].

O primeiro caso a ser analisado é o do caminho P_7, denotado por G_1, conforme mostrado na Figura 3.1. Neste caso, $a(G_1) = 0{,}198$ e $k(G_1) = \lambda(G_1) = 1$.

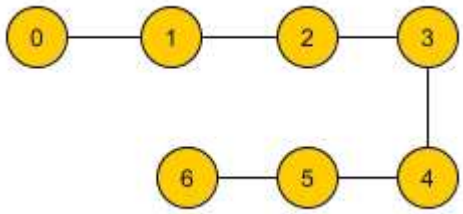


Figura 3.1: $\boldsymbol{G_1 = P_7}$

Neste caso, o maior aumento na conectividade algébrica foi encontrado após a inserção de uma aresta que liga os vértices v_0 e v_6, obtendo o ciclo C_7.

A Tabela 3.1 mostra o valor da conectividade algébrica após a inserção de uma aresta no grafo G_1, bem como as medidas de centralidade de *closeness* ($c_c(v)$) e *betweeness* ($c_b(v)$) dos vértices desse grafo antes da inserção da nova aresta, indicando também o aumento percentual do valor da conectividade algébrica. Todas as tabelas semelhantes que são mostradas para os demais grafos são apresentadas em ordem decrescente de$\alpha = |u_i - u_j|$, onde u_i indica a entrada do autovetor de Fiedler associada ao vértice v_i. Neste caso, o vetor de Fiedler de G_1 é:

(1;0,8019; 0,445; 0; -0,445; -0,801,-1)

Tabela 3.1: Relações entre o aumento da conectividade algébrica através da inserção de uma aresta no grafo P_7 entre os vértices v_i e v_j

v_i	v_j	u_i	u_j	α	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$c_b(v_i)$	$c_b(v_j)$	$c_c(v_i)$	$c_c(v_j)$	$a(G_1 + e)$	Aumento % em $a(G_1)$
0	6	1	-1	2	1	1	0	0	0,285	0,285	0,753	280%
1	6	0,801	-1	1,802	2	1	5	0	0,375	0,285	0,585	195%
0	5	1	-0,801	1,801	1	2	0	5	0,285	0,375	0,585	195%
1	5	0,801	-0,801	1,603	2	2	5	5	0,375	0,375	0,622	214%
0	4	1	-0,445	1,445	1	2	0	8	0,285	0,461	0,381	92%
2	6	0,445	-1	1,445	2	1	8	0	0,461	0,285	0,381	92%
1	4	0,801	-0,445	1,247	2	2	5	8	0,375	0,461	0,381	92%
2	5	0,445	-0,801	1,246	2	2	8	5	0,461	0,375	0,381	92%
0	3	1	0	1	1	2	0	9	0,285	0,5	0,276	39%
3	6	0	-1	1	2	1	9	0	0,5	0,285	0,276	39%
2	4	0,445	-0,445	0,890	2	2	8	8	0,461	0,461	0,300	51%
1	3	0,801	0	0,802	2	2	5	9	0,375	0,5	0,267	35%
3	5	0	-0,801	0,801	2	2	9	5	0,5	0,375	0,267	35%
0	2	1	0,445	0,555	1	2	0	8	0,285	0,461	0,225	14%
4	6	-0,445	-1	0,555	2	1	8	0	0,461	0,285	0,225	14%

Podemos notar que estes valores corroboram o resultado apresentado na Seção 3.1, indicando que o maior incremento de $a(G_1)$, proveniente da análise das componentes do vetor de Fiedler, é dado através da ligação entre os vértices de menor grau. Neste caso, a inserção foi entre os vértices v_0 e v_6. Além disso, a inclusão desta aresta também é a única que aumenta o valor de $k(G_1)$ e de $\lambda(G_1)$.

Também podem ser observados os respectivos valores das medidas de centralidade de intermediação e proximidade dos vértices de G_1. Neste caso, podemos notar que o maior aumento na conectividade algébrica também é advindo da ligação entre vértices com baixo valor de intermediação e proximidade.

O Gráfico 3.1 mostra a relação entre o aumento da conectividade algébrica e a diferença, em módulo, das respectivas entradas do vetor de Fiedler correspondentes aos vértices v_i e v_j, isto é, $|u_i - u_j|$. O eixo horizontal indica a diferença entre as entradas do vetor de Fiedler referente aos vértices v_i *e* v_j e o eixo vertical indica a conectividade algébrica obtida após a inserção de uma aresta entre os vértices v_i *e* v_j.

A reta mostra o ajuste da distribuição a uma função exponencial. Nota-se que o coeficiente de determinação de ajuste à função exponencial R^2 é de 0,93, indicando boa representação entre as variáveis, o que também corrobora os resultados de Wang e Mieghem [47], apresentados na Seção 3.1. A fórmula de cálculo de R^2 é mostrada a seguir.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(\widehat{y_i} - y_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(\widehat{y_i} - y_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(\widehat{y_i} - \bar{y})^2},$$

onde n é o número de observações, y_i é o valor observado, $\bar{y}$ é a média das observações e $\widehat{y_i}$ é a estimativa (valor previsto) de y_i. Portanto, quanto maior o valor de R^2, maior é a correlação entre as variáveis em estudo.

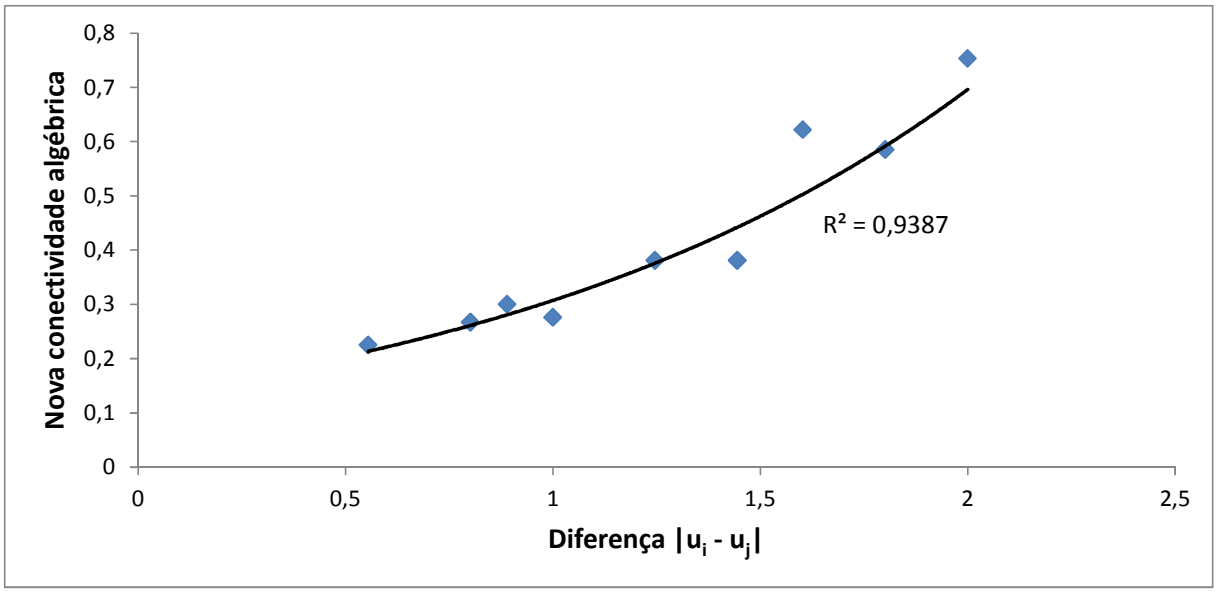


Gráfico 3.1: Relação entre conectividade algébrica e Vetor de Fiedler para o grafo G_1

Agora são apresentadas análises semelhantes para outros tipos de grafos com um número maior de vértices. A Figura 3.2 apresenta um grafo do tipo Erdös-Rényi, denotado por G_2, com 28 vértices e probabilidade de existir uma aresta de $p = 0{,}3$, gerado através do software CoCalc. Neste caso, $a(G_2) = 2{,}22$ e o vetor de Fiedler é: (1; -5,99; 0,513; 0,149; 0,443; -1,69; 0,301; 0,979; 0,044; 0,717; 0,509; -0,1; -0,62; 0,265; 0,759; 0,071; 0,61; 0,142; 0,572; 0,268; -1,96; 0,149; 1,062; 0,862; 0,47; 0,838; 0,632; -0,97).

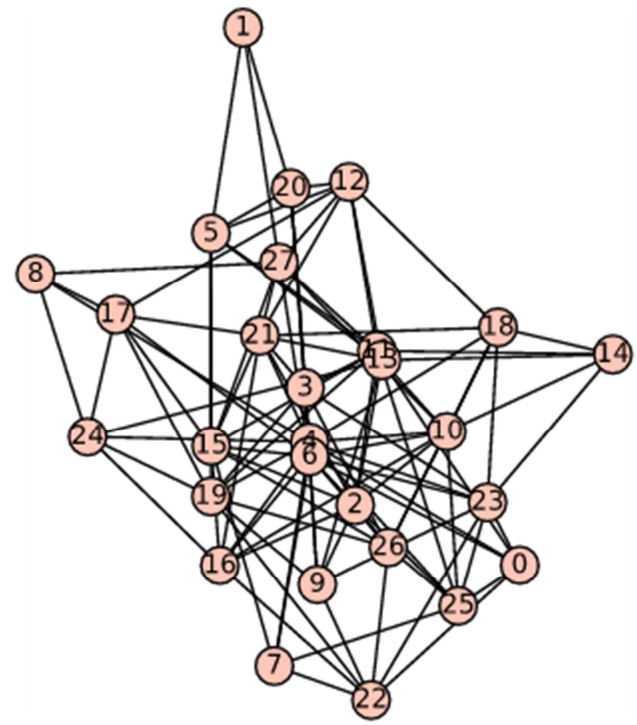


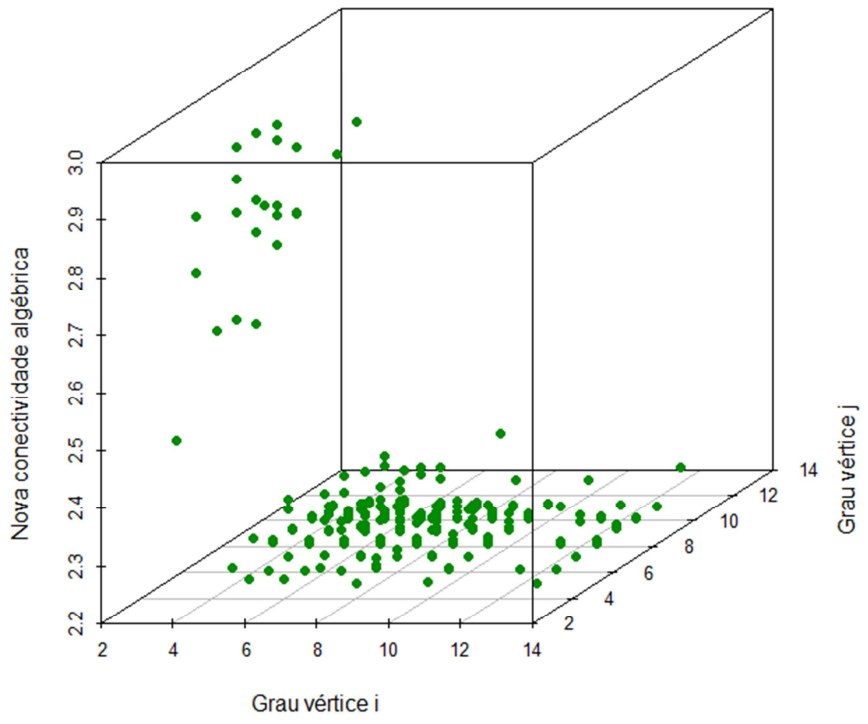
Figura 3.2: Grafo G_2

Neste caso foram realizadas 268 possíveis inserções de arestasno grafo G_2. Um resumo com 14 possibilidades de inserções de aresta é apresentado na Tabela 3.2, com as medidas de centralidade dos vértices nos quais a aresta foi inserida, de forma análoga à Tabela 3.1, ordenada de forma decrescente com relação à diferença $\alpha = |u_i - u_j|$. Podemos notar que estes valores também corroboram o resultado apresentado na Seção 3.1, indicando que o maior incremento no valor de $a(G_2)$ provenientes da análise dos componentes do vetor de Fiedler é dado através da ligação entre os vértices com medidas de centralidade baixas.

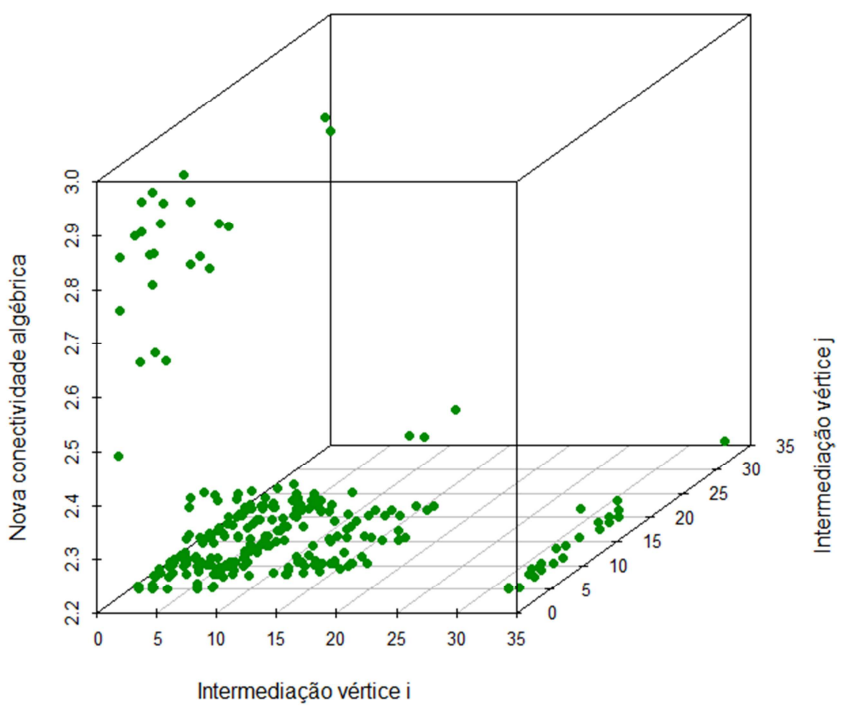
A Figura 3.3 apresenta as relações entre os parâmetros: grau; centralidade de intermediação e centralidade de proximidade dos vértices v_i e v_j para os quais a nova aresta foi incluída, bem como a nova conectividade algébrica do grafo após a inserção desta aresta. Em todos os casos podemos ver que os pontos mais altos, ou seja, aqueles com maior valor de $a(G_2 + e)$ se concentram em valores baixos dos parâmetros mostrados, indicando que de fato a inclusão de arestas entre vértices com grau, intermediação e proximidade com valores menores trazem um maior incremento para a conectividade algébrica. É importante notar que caso a inserção de uma nova aresta seja realizada apenas através do critério das medidas de centralidade existe a possibilidade de não se obter o maior aumento possível no valor da conectividade algébrica, mostrado pelos pontos mais baixos nos gráficos da Figura 3.3.

Tabela 3.2: Relações entre o aumento da conectividade algébrica através da inserção de uma aresta no grafo G_2 entre os vértices v_i e v_j.

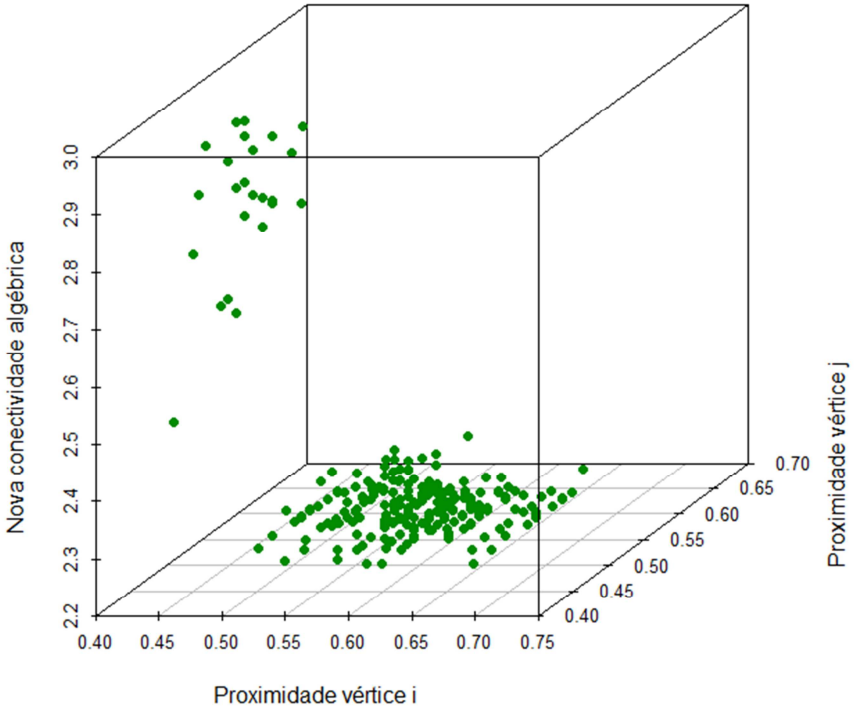
v_i	v_j	u_i	u_j	α	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$c_b(v_i)$	$c_b(v_j)$	$c_c(v_i)$	$c_c(v_j)$	$a(G_2 + e)$	**Aumento % em $a(G_2)$**
1	22	-5,990	1,062	7,050	3	7	0,67	5,55	0,421	0,519	2,915	31,00%
0	1	1	-5,99	6,996	6	3	3,44	0,67	0,551	0,421	2,902	30,42%
1	7	-5,990	0,979	6,970	3	5	0,67	2,31	0,421	0,509	2,839	27,58%
1	23	-5,990	0,862	6,850	3	9	0,67	11,83	0,421	0,574	2,909	30,73%
1	25	-5,990	0,838	6,830	3	8	0,67	7,14	0,421	0,562	2,917	31,09%
1	9	-5,990	0,717	6,710	3	7	0,67	4,61	0,421	0,551	2,860	28,53%
1	26	-5,990	0,632	6,620	3	9	0,67	8,79	0,421	0,574	2,883	29,56%
1	16	-5,990	0,61	6,60	3	8	0,67	7,35	0,421	0,574	2,802	25,92%
1	18	-5,990	0,572	6,560	3	7	0,67	6,85	0,421	0,562	2,803	25,97%
1	2	-5,990	0,513	6,50	3	10	0,67	8,43	0,421	0,586	2,848	27,99%
1	10	-5,990	0,509	6,50	3	10	0,67	12,91	0,421	0,613	2,848	27,99%
1	4	-5,990	0,443	6,440	3	12	0,67	33,94	0,421	0,642	2,792	25,47%
1	6	-5,990	0,301	6,290	3	13	0,67	33,13	0,421	0,658	2,825	26,96%
1	13	-5,990	0,265	6,260	3	9	0,67	17,19	0,421	0,586	2,769	24,44%
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮



(a) Relação entre Grau e Conectividade Algébrica



(b) Relação entre Intermediação e Conectividade Algébrica



(c) Relação entre Proximidade e Conectividade Algébrica

Figura 3.3: Relações de aumento da conectividade algébrica para o grafo $\boldsymbol{G_2}$

No Gráfico 3.2 pode ser visto que, na maior parte dos casos, quanto maior a diferença entre as entradas do vetor de Fiedler, maior o aumento de $a(G_2)$, com coeficiente de determinação R² de 0,91. O maior aumento da conectividade algébrica se deu pela inserção de uma aresta entre os vértices v_1 e v_{25}, com graus 3 e 8 representando um aumento de 31,09% com relação ao grafo original. Além disso, dentre as 268 possibilidades de inserção, são 24 aquelas que promovem um aumento de $k(G_2) = \lambda(G_2) = 3$, no grafo original, para $k(G_2 + e) = \lambda(G_2 + e) = 4$, conforme mostra o Gráfico 3.3, que exibe as conectividades de vértice e de arestas de todos os grafos obtidos após a inserção de um aresta no grafo G_2.

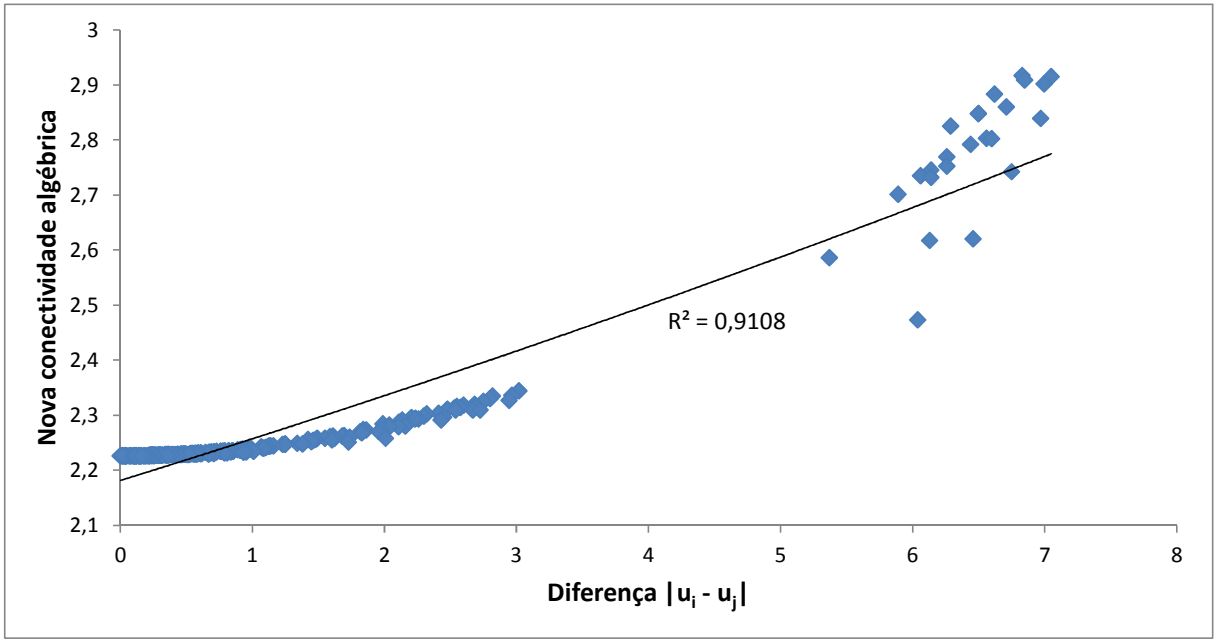


Gráfico 3.2: Relação entre conectividade algébrica e Vetor de Fiedler para grafo G_2.

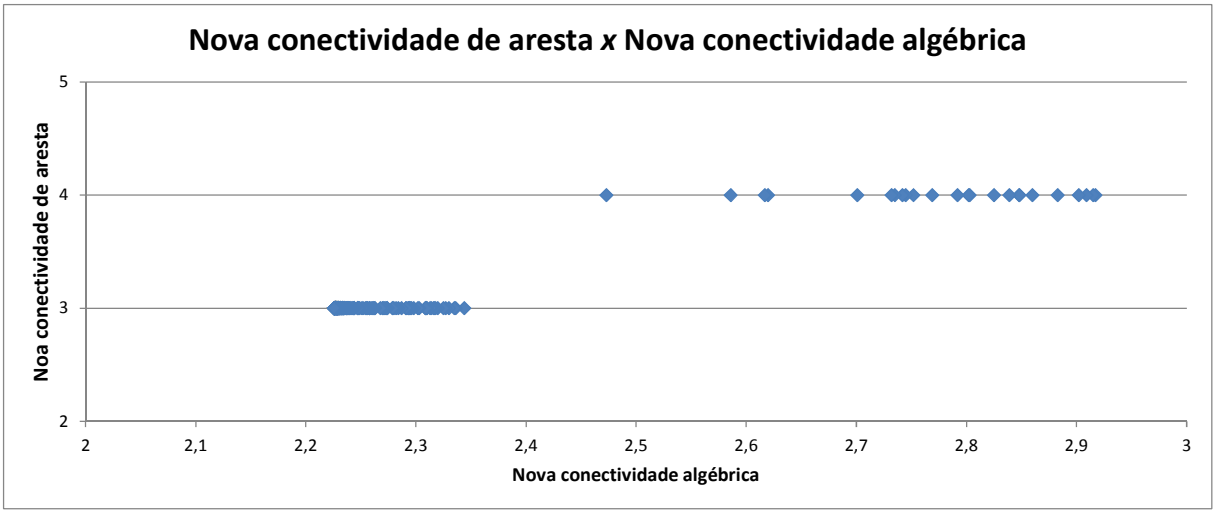


Gráfico 3.3: Relação entre conectividade algébrica e conectividade de arestas $\boldsymbol{G_2}$

A seguir, é apresentada uma análise similar para um grafo do tipo Barabasi-Albert, com 30 vértices e grau mínimo 3, gerado pelo software CoCalc, denotado por G_3, apresentado na Figura 3.4. Neste caso, $a(G_3) = 1{,}446$, $k(G_3) = \lambda(G_3) = 3$ e o vetor de Fiedler é (1; -0,02; -0,41; 0,22; -0,226; 0,546; -0,33; -0,126; 0,26; 0,6316; -0,772; -0,24; 0,33; -0,569; -0,62; -1,029; 0,491; -1,31; 0,61; 0,754; 1,535; 0,18; 0,34; -0,3; 0,39; -0,674; 0,888; -0,216; -1,07; -0,4)

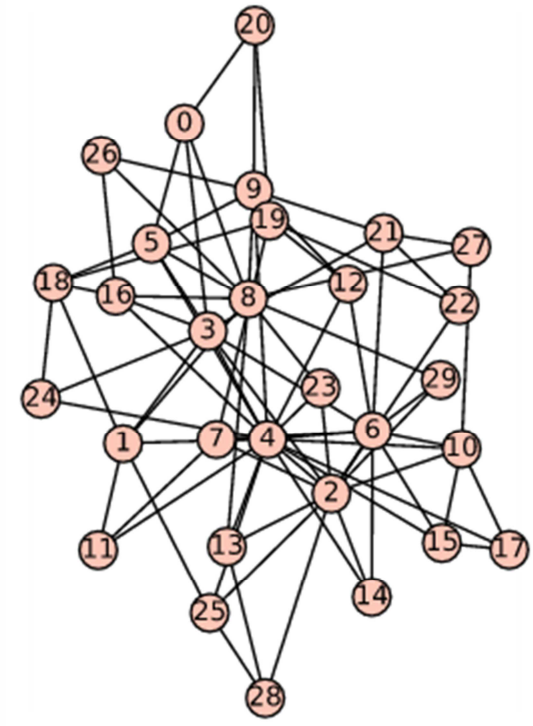


Figura 3.4: Grafo $\boldsymbol{G_3}$

Para este grafo foram realizadas 354 possibilidades de inserções de arestas. A Tabela 3.3 mostra 14 possibilidades de inserções de arestas e seus respectivos aumentos obtidos para a conectividade algébrica e as medidas de centralidade para seus respectivos vértices, bem como os gráficos apresentados na Figura 3.5, indicando, novamente, que os maiores valores da nova conectividade algébrica ocorrem na inserção de arestas ligando os vértices com menor grau e valores de centralidade de intermediação e proximidade também baixos. O maior aumento obtido para a conectividade algébrica foi de 12,5%, através da inserção de aresta entre os vértices v_{10} e v_{20}, cujos graus são 6 e 3, respectivamente.

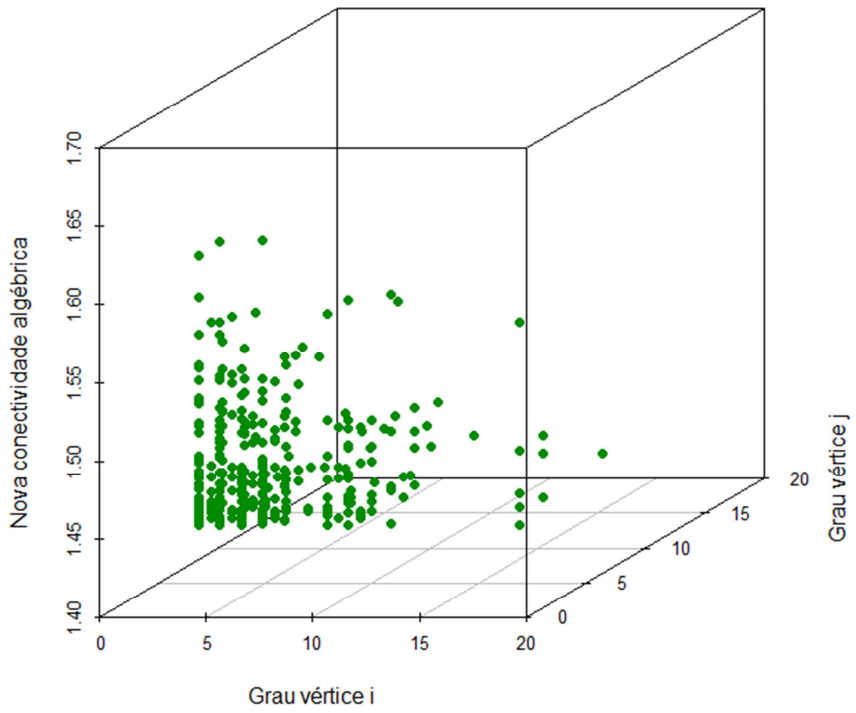
Até então, podemos verificar que na maioria dos casos o maior aumento no valor da conectividade algébrica geralmente está relacionado com vértices de grau baixo. No entanto, é importante apontar que o contrário nem sempre é verdade, isto é, a inserção de arestas entre vértices de grau baixo nem sempre irá prover o maior incremento no valor de $a(G)$. Como pode ser visto na Figura 3.5, existem diversos casos nos quais vértices com grau mínimo não trazem aumento considerável de $a(G)$. Por exemplo, podem ser observados diversos pontos na Figura 3.5 (b) cujos valores de intermediação são baixos, mas cujo aumento da conectividade algébrica não é expressivo.

Por outro lado, o mesmo não ocorre quando se trata da diferença do vetor de Fiedler. O Gráfico 3.4 é claro em mostrar que existe uma correlação na qual quanto maior a diferença, maior será o aumento de $a(G)$ e vice-versa. Ou seja, diferentemente do caso do grau mínimo, a estratégia do vetor de Fiedler parece sempre gerar bons aumentos no valor da conectividade algébrica. Iremos retomar esta linha de raciocínio ao final desta seção.

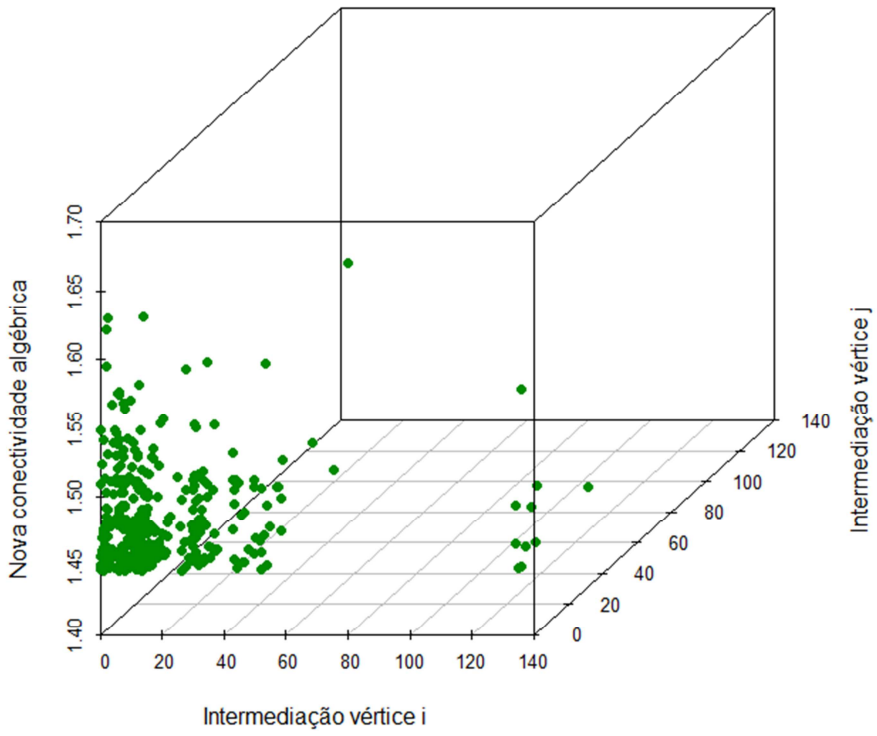
Neste caso, nenhuma combinação de vértices trouxe alteração da conectividade de vértices e de arestas. Em todas as possibilidades temos que $k(G_3 + e) = \lambda(G_3 + e) = 3$.

Tabela 3.3: Relações entre o aumento da conectividade algébrica através da inserção de uma aresta no grafo G_3 entre os vértices v_i e v_j

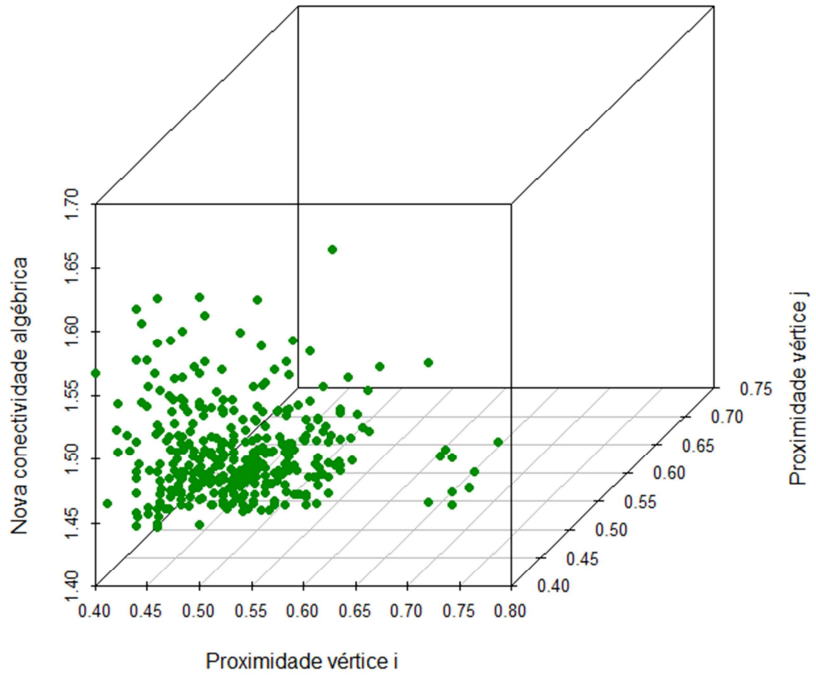
v_i	v_j	u_i	u_j	α	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$c_b(v_i)$	$c_b(v_j)$	$c_c(v_i)$	$c_c(v_j)$	$a(G_3 + e)$	Aumento % em $a(G_3)$
17	20	-1,310	1,535	2,845	3	3	0	3,4	0,44	0,4	1,618	11,89%
20	28	1,535	-1,070	2,605	3	3	3,4	0,33	0,4	0,4	1,567	8,37%
15	20	-1,029	1,535	2,564	4	3	0,7	3,4	0,46	0,4	1,626	12,45%
0	17	1	-1,310	2,310	4	3	5,81	0	0,45	0,44	1,575	8,92%
10	20	-0,772	1,535	2,307	6	3	11,93	3,4	0,5	0,4	1,627	12,52%
20	25	1,535	-0,674	2,209	3	4	3,4	5,08	0,4	0,48	1,571	8,64%
14	20	-0,620	1,535	2,155	3	3	0	3,4	0,46	0,4	1,591	10,03%
13	20	-0,569	1,535	2,104	4	3	7,75	3,4	0,5	0,4	1,567	8,37%
17	19	-1,310	0,754	2,064	3	5	0	13,07	0,44	0,43	1,554	7,47%
0	15	1	-1,029	2,029	4	4	5,81	0,7	0,45	0,46	1,574	8,85%
2	20	-0,410	1,535	1,945	12	3	51,7	3,4	0,59	0,4	1,593	10,17%
6	20	-0,330	1,535	1,865	10	3	25,97	3,4	0,56	0,4	1,589	9,89%
0	10	1	-0,772	1,772	4	6	5,81	11,93	0,45	0,5	1,568	8,44%
4	20	-0,226	1,535	1,761	18	3	133,9	3,4	0,72	0,4	1,575	8,92%
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮



(a) Relação entre Grau e Conectividade Algébrica



(b) Relação entre Intermediação e Conectividade Algébrica



(c) Relação entre Proximidade e Conectividade Algébrica

Figura 3.5: Relações de aumento da conectividade algébrica para o grafo G_3

O Gráfico 3.4 apresenta uma análise da correlação entre a diferença das entradas do vetor de Fiedler e a conectividade algébrica de $G_3 + e$. Novamente, podemos concluir que de fato a correlação existe corroborada pelo coeficiente de determinação, $R^2 = 0{,}89$.

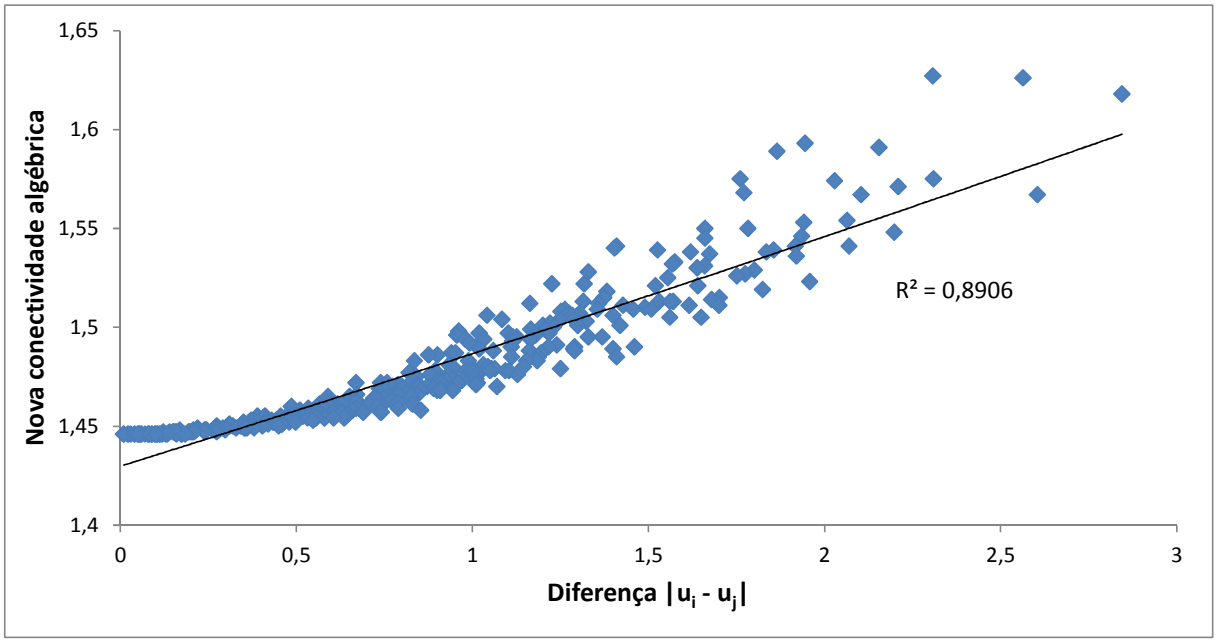


Gráfico 3.4: Relação entre conectividade algébrica e Vetor de Fiedler para grafo G_3

Para concluir esta seção iremos realizar uma análise semelhante às anteriores para uma rede real – a Rede Nacional de Ensino e Pesquisa do Brasil, obtida através do site Topology Zoo [45], modelada pelo grafo G_4, com 30 vértices e $\delta(G_4) = 1$, mostrada na Figura 3.6.

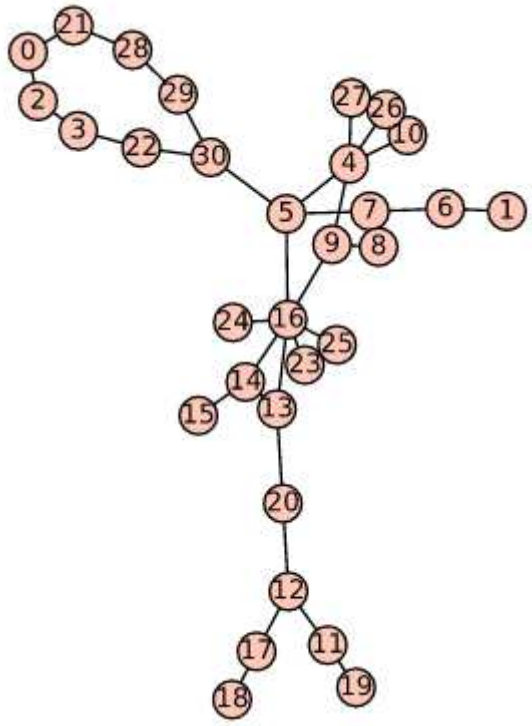


Figura 3.6: Grafo que modela a Rede Nacional de Ensino e Pesquisa – Brasil – Grafo $\boldsymbol{G_4}$.

Seguindo o mesmo padrão dos resultados anteriores, a Tabela 3.4 apresenta os maiores incrementos da conectividade algébrica em ordem decrescente de $|u_i - u_j|$. Posteriormente, a Figura 3.7 apresenta os gráficos que correlacionam as medidas de centralidade com o valor de conectividade algébrica do grafo gerado pela inserção de uma aresta entre os vértices v_i e v_j. Neste caso, $a(G_4) = 0{,}055$ e o vetor de Fiedler é (1; 0,223; 0,972; 0,891; 0,155; 0,211; 0,211; 0,187; 0,129; 0,063; 0,164; -1,28; -1,13; -0,38; -0,25; -0,27; -0,09; -1,28; -1,35;-1,35; -0,78; 0,972; 0,76; -0,1; -0,1; -0,1; 0,164; 0,164; 0,891; 0,76).

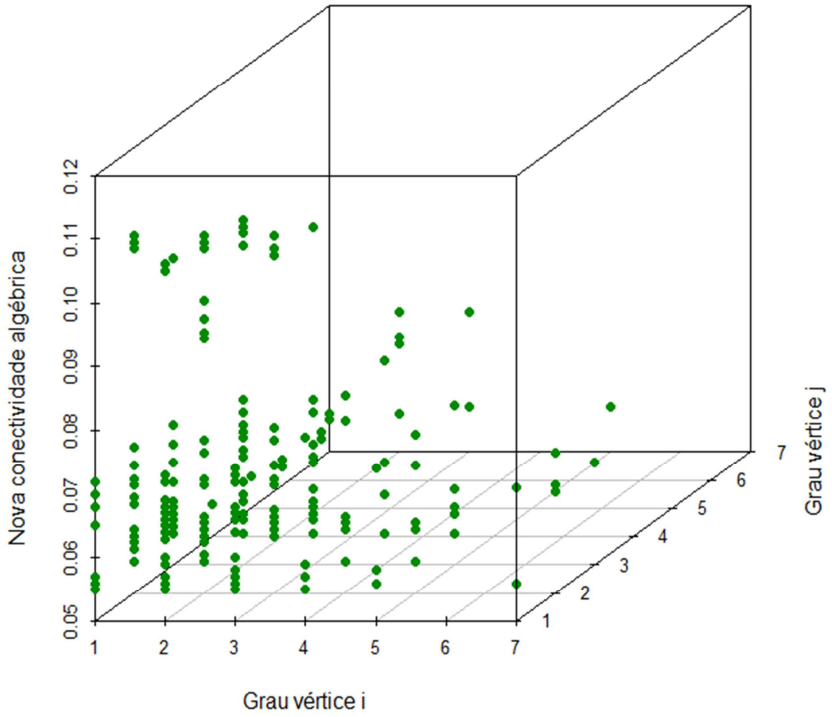
Para este grafo foram realizadas 431 iterações e o maior aumento no valor da conectividade algébrica não foi obtido pela inserção da aresta entre os vértices com a maior diferença em módulo do vetor de Fiedler. Uma das prováveis causas dessa mudança de padrão é que este grafo, diferentemente dos grafos anteriores, possui muitos vértices de grau mínimo. Nota-se, também, que o maior aumento de $a(G)$ não foi obtido pela ligação entre vértices de grau mínimo, o que também contraria essa estratégia de inserção de aresta.

No entanto, o Gráfico 3.5 apresenta o resultado de correlação entre a diferença em módulo das entradas do vetor de Fiedler e a conectividade algébrica de $G_4 + e$. Mais uma vez, o valor para o coeficiente de correlação R^2 é alto, $R^2 = 0{,}89$, indicando bom ajuste da distribuição de dados a uma função exponencial. Portanto, embora o maior aumento de $a(G)$

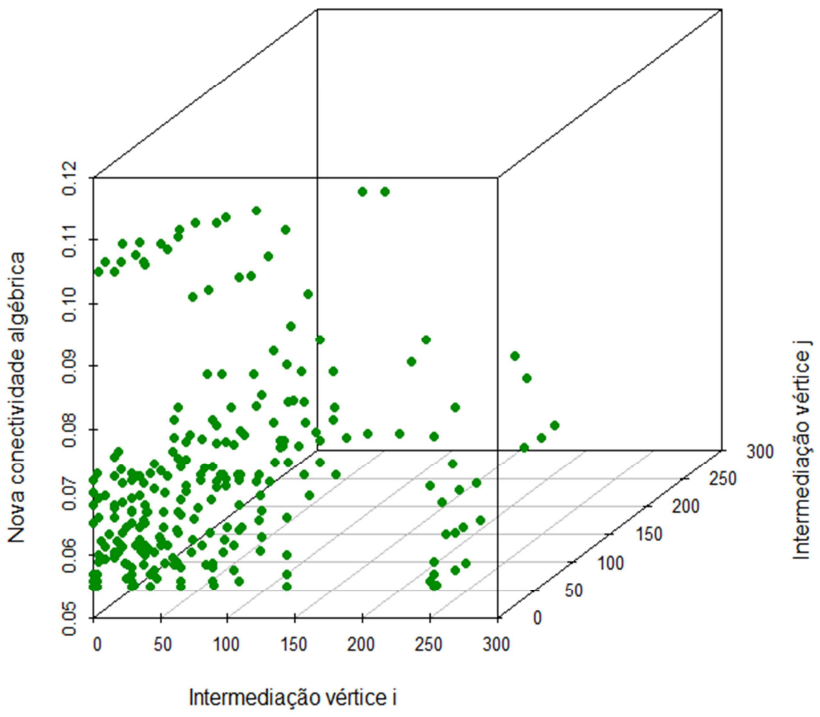
não tenha relação com este critério, ainda assim ele demonstra ser uma boa opção de inserção de aresta com o objetivo de aumentar a conectividade algébrica.

Tabela 3.4: Relações entre o aumento da conectividade algébrica através da inserção de uma aresta no grafo G_4 entre os vértices v_i e v_j

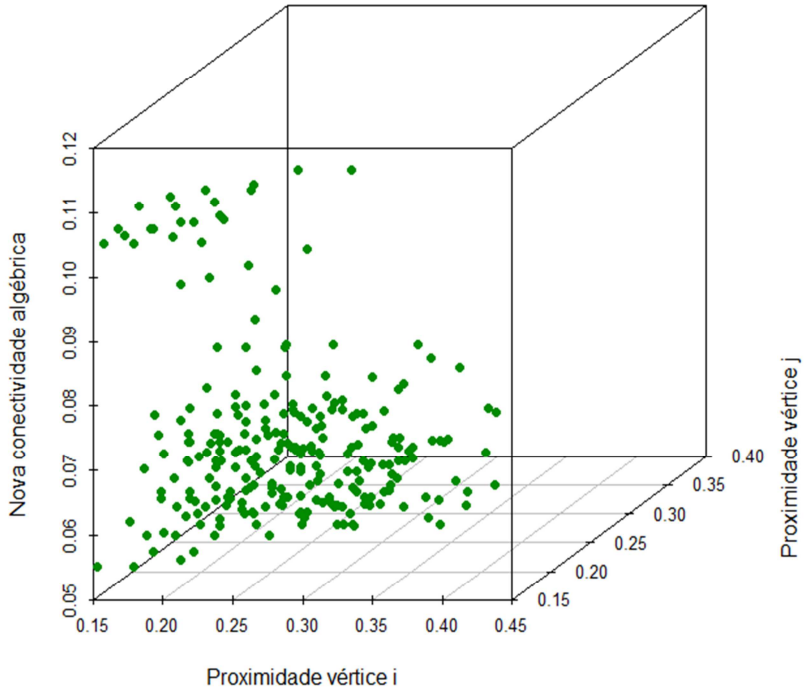
v_i	v_j	u_i	u_j	α	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$c_b(v_i)$	$c_b(v_j)$	$c_c(v_i)$	$c_c(v_j)$	$a(G_4 + e)$	Aumento % em $a(G_4)$
0	18	1	-1,350	2,356	2	1	4,5	0	0,157	0,152	0,105	91%
0	19	1	-1,350	2,356	2	1	4,5	0	0,157	0,152	0,105	91%
2	11	0,972	-1,280	2,253	2	2	16	29	0,178	0,178	0,105	91%
2	17	0,972	-1,280	2,253	2	2	16	29	0,178	0,178	0,105	91%
3	18	0,891	-1,350	2,247	2	1	39	0	0,206	0,152	0,106	92%
3	19	0,891	-1,350	2,247	2	1	39	0	0,206	0,152	0,106	92%
18	28	-1,350	0,891	2,24	1	2	0	39	0,152	0,206	0,106	92%
19	28	-1,350	0,891	2,24	1	2	0	39	0,152	0,206	0,106	92%
3	11	0,891	-1,280	2,172	2	2	39	29	0,206	0,178	0,106	92%
3	17	0,891	-1,28	2,172	2	2	39	29	0,206	0,178	0,106	92%
11	28	-1,280	0,891	2,17	2	2	29	39	0,178	0,206	0,106	92%
17	28	-1,280	0,891	2,17	2	2	29	39	0,178	0,206	0,106	92%
12	22	-1,130	0,760	1,89	3	2	108	62	0,212	0,245	0,106	92%
12	29	-1,130	0,760	1,89	3	2	108	62	0,212	0,245	0,106	92%
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮



(a) Relação entre Grau e Conectividade Algébrica



(b) Relação entre Intermediação e Conectividade Algébrica



(c) Relação entre Proximidade e Conectividade Algébrica

Figura 3.7: Relações de aumento da conectividade algébrica para o grafo $\boldsymbol{G_4}$

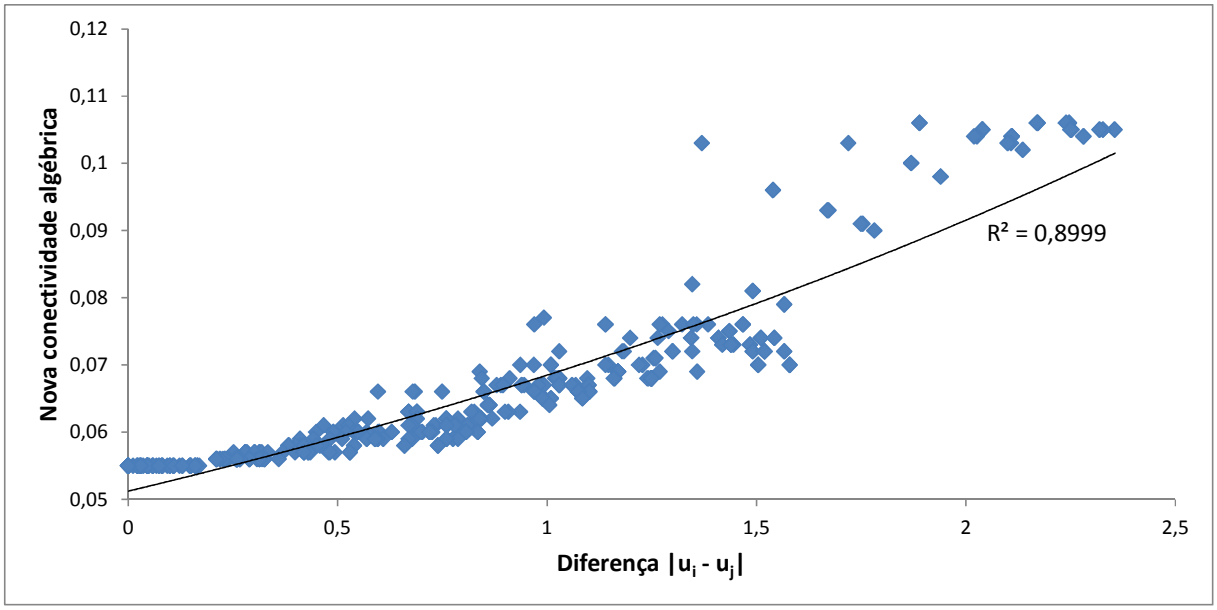


Gráfico 3.5: Relação entre conectividade algébrica e Vetor de Fiedler para a rede real RNP brasileira

Para o grafo G_4 existem 10 combinações de vértices que trazem um aumento de 92% no valor da conectividade algébrica com relação ao grafo original, como é apresentado na Tabela 3.5.

Tabela 3.5: Combinações de vértices para a rede RNP brasileira

Vértice i	Vértice j	Grau vértice i	Grau vértice j
3	11	2	2
3	17	2	2
3	18	2	1
3	19	2	1
11	28	2	2
12	22	3	2
12	29	3	2
17	28	2	2
18	28	1	2
19	28	1	2

Como conclusão desta seção, foi verificado que, de fato, pode ser observada uma relação, nos casos estudados, entre o aumento da conectividade algébrica através da inclusão de uma nova aresta e: (i) o grau; (ii) as medidas de centralidade de intermediação e de proximidade e (iii) a diferença em módulo das entradas do vetor de Fiedler dos respectivos vértices, o que corrobora os resultados encontrados por Wang e Mieghem [47], a respeito do vetor de Fiedler apresentados na Seção 3.1.

No entanto, é necessário realizar um adendo que pode ser obtido através dos resultados mostrados anteriormente. Como podem ser observados nos gráficos a respeito de cada um dos grafos fica claro que existe uma relação na qual os maiores valores de conectividade algébrica estão relacionados com a inserção de arestas entre vértices com grau e medidas de centralidade de intermediação e proximidade baixas. Porém, o inverso nem sempre é verdadeiro, isto é, podem ser observados diversos pontos que indicam uma conectividade algébrica muito baixa após a inserção de arestas em vértices que possuem essas medidas de centralidade também baixas.

Portanto, embora a premissa inicial tenha sido ratificada, com base nos resultados deste estudo e dos resultados apresentados por Wang e Mieghem [47], não é possível afirmar quais vértices dentre todos aqueles com grau mínimo, ou com medidas de centralidade baixas, devem ser aqueles escolhidos para a inserção de aresta. Estudos apresentados na Seção 3.1 indicam que tal escolha varia em função do tipo de grafo, tornando esta escolha específica para determinadas famílias de grafos.

Porém, tanto os resultados mostrados nessa seção, como aqueles de Wang e Mieghem [47], indicam que tal dificuldade nesta escolha não se aplica ao critério da diferença $|u_i - u_j|$ correspondente ao vetor de Fiedler. Os resultados são claros em apontar que na maior parte dos casos quanto maior esta diferença maior será o aumento da conectividade algébrica, indicando ser esta uma boa estratégica para inclusão de arestas objetivando o incremento da conectividade algébrica.

3.3 RELAÇÕES ENTRE CONFIABILIDADE EM REDES E MEDIDAS DE CENTRALIDADE

Em 2010, Silva [42], em sua dissertação de mestrado, busca indicar uma possível relação entre medidas de centralidade de um grafo e o cálculo da confiabilidade da rede com falhas em arestas. Uma vez que após a inclusão de uma nova aresta em G os valores da confiabilidade dos grafos resultantes, $G + e$, são distintos, a depender do par de vértices v_i, v_j ligado pela nova aresta, torna-se importante identificar qual nova aresta pode trazer maior incremento na confiabilidade da rede.

Para isso, o autor calculou para todos os possíveis grafos tal que $n = 4, 5, (n - 1 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2})$ e para 6, considerando $7 < m \leq 10$ de forma que foram contabilizadas mais de 250 combinações. Desta maneira, a partir de um grafo G são calculadas as medidas de

centralidade de seus vértices e então inserida uma aresta em cada par de vértices possível, gerando um novo grafo $G + e$. Então foi calculada a nova confiabilidade da rede modelada por $G + e$. Assim, foi observado que a aresta que gerou o maior aumento na confiabilidade foi a aresta que ligou o vértice de menor centralidade de proximidade e o vértice mais distante dele, totalizando 93% dos casos. Posteriormente, o segundo critério que apresentou os melhores resultados foi o de proximidade, no qual os vértices com menor centralidade de proximidade foram conectados. Os critérios de intermediação, no qual são conectados os vértices com menor centralidade de intermediação e de autovetor foram, respectivamente, o terceiro e quarto critério mais assertivos quanto ao aumento da confiabilidade da rede.

Lyra e Oliveira [34] apresentaram um estudo similar a respeito de uma rede de coautoria, na qual os vértices são confiáveis e as arestas são propensas a falhas. Assim, o estudo também tem como objetivo correlacionar as medidas de centralidade dos vértices do grafo com o potencial aumento na confiabilidade da rede após a inserção de uma aresta. O diferencial deste estudo foi que as autoras verificaram previamente que dado um mesmo grafo G a aresta que gera o maior incremento da confiabilidade é diferente entre os casos: (i) no qual a probabilidade de falha das arestas é sempre a mesma e (ii) no qual a probabilidade de falha de cada aresta é diferente.

As autoras mostraram que: no caso (i), no qual a probabilidade de falha nas arestas é a mesma, o maior incremento acontece quando os vértices com menor centralidade de grau são conectados. Porém, para o caso específico mostrado no trabalho, as autoras concluem que para o caso (ii) a utilização de medidas de centralidade não é uma boa estratégia para o aumento da confiabilidade da rede. Com isso, conclui-se que seria necessária a realização de mais simulações para obter uma resposta mais precisa neste segundo cenário.

Por fim, iremos apresentar um trabalho que relaciona a conectividade algébrica, $a(G)$, com a conectividade de aresta $\lambda(G)$ da rede. Como visto no Capítulo 2, a não-confiabilidade de um grafo é uma função que depende de $\lambda(G)$. Portanto, uma das questões que ensejam esta pesquisa está na relação entre estes parâmetros determinísticos de uma rede (como por exemplo: conectividade algébrica e conectividade de arestas) com a não-confiabilidade, que é uma medida probabilística. Diante disso, apresentamos um trabalho de Jamakovic e Uhlig [27], no qual os autores estudam a relação entre $a(G)$,$\lambda(G)$ e $k(G)$ em redes do tipo Erdös-Rényi, Watts-Strogatz e Barabási-Albert (BA).

Jamakovic e Uhlig [27] iniciaram o estudo apresentando o trabalho de Bollobás [9] no qual o autor provou que a probabilidade de $\lambda(G) = k(G) = \delta(G)$ se aproxima de 1

conforme $n \to \infty$, em grafos aleatórios do tipo Erdös-Rényi, independentemente da probabilidade p associada à construção desse tipo de grafo. Dessa forma, o grau mínimo $\delta(G)$ é uma boa estimativa para a conectividade de vértices e de arestas para grafos com muitos vértices. No entanto, o interessante neste trabalho é que os autores conseguem mostrar, através de métodos computacionais, que diferentemente do grau mínimo, a conectividade algébrica não converge para $k(G)$ ou $\lambda(G)$ conforme n aumenta, para grafos aleatórios do tipo Erdös-Rényi, Barabasi-Albert e Watts-Strogatz. Ou seja, dada a desigualdade $a(G) \leq k(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$, para estas redes aleatórias os valores de $k(G)$ e $\lambda(G)$ ficam significativamente distantes de $a(G)$ conforme a ordem do grafo aumenta.

De forma similar, os autores calcularam as mesmas medidas para redes do tipo Watts-Strogatz com$n = 50, 100\ e\ 500$ vértices. Novamente, eles chegam à conclusão de que $a(G)$ se torna um fraco limite inferior conforme n cresce. Isto é, nos casos onde $n = 500$ os parâmetros $k(G)$ e $\lambda(G)$ são extremamente distantes da conectividade algébrica. Os autores mostram também que para um dado valor de $k(G)$ ou $\lambda(G)$, a conectividade algébrica é uma função decrescente da ordem n do grafo. Para redes livres de escala, BA, o resultado é semelhante.

Este resultado nos leva à seguinte questão: se em alguns tipos de redes aleatórias a conectividade algébrica possui tal característica de ser um limite inferior distante para a conectividade de arestas $\lambda(G)$, conforme o aumento de n, e sabendo que a não-confiabilidade da rede é função que depende de $\lambda(G)$, como será o comportamento da confiabilidade da rede a partir de estratégias que buscam aumentar $a(G)$? É a partir deste questionamento que seguem os próximos capítulos desta dissertação. Ou seja, quais são os efeitos no valor da confiabilidade da rede através do uso de estratégias que buscam aumentar o valor da conectividade algébrica pela inserção de novas arestas na rede?

4 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Esse capítulo tem como objetivo a realização de simulações de inserção de arestas em diversos grafos a fim de realizar uma análise composta por 3 etapas: na primeira etapa são avaliadas as estratégias de inserção de arestas mostradas no Capítulo 3 (ligação entre os vértices de menor grau, ligação entre vértices com menores valores de centralidade e ligação entre vértices com maior α) e seus respectivos impactos no incremento da conectividade algébrica. Posteriormente, na segunda etapa, estas mesmas estratégias também são verificadas a fim de medir quão cada uma delas é efetiva para o aumento da confiabilidade da rede. Por fim, a terceira etapa consiste em confrontar se, de fato, grafos que obtiveram altos aumentos na conectividade algébrica também obtiveram aumentos consideráveis na confiabilidade da rede. Dessa forma, é possível elucidar se estratégias de inserção de arestas que objetivam o aumento de $a(G)$ também conseguem um bom aumento de $R(G)$ e o quanto estas duas medidas estão relacionadas.

Para isso, na Seção 4.1 são apresentadas as relações verificadas entre o aumento da conectividade algébrica e o aumento da confiabilidade da rede para redes com 5 e 6 vértices. Na Seção 4.2 são exibidas relações entre o aumento da conectividade algébrica e da confiabilidade para redes reais e, por fim, na Seção 4.3 são avaliados os comportamentos de inserção de arestas em redes com vértices universais.

4.1 INSERÇÃO DE ARESTAS E O AUMENTO DA CONECTIVIDADE ALGÉBRICA E DA CONFIABILIDADE DA REDE – REDES COM 5 E 6 VÉRTICES

Esta seção tem como base de análise todos os grafos com 5 e com 6 vértices tais que $\lambda(G) = 2$ e $\lambda(G + e_i) = 2$, onde e_i representa todas as possíveis inserções de arestas no grafo G que não altera o valor da conectividade de aresta em relação ao grafo original, a fim de garantir as simulações de inserção de aresta em tempo computacional reduzido, devido a complexidade do cálculo da função de confiabilidade grafos com 5 e 6 vértices. Desta forma, para todos esses grafos serão realizadas, no primeiro momento, o cálculo da conectividade algébrica, das medidas de centralidade de *closeness* e de *betweeness* e, também, o cálculo do vetor de Fiedler a fim de obter a diferença α para cada um dos possíveis pares de vértices a

serem conectados. Posteriormente, são realizadas todas as possíveis inserções de arestas e as análises do incremento da conectividade algébrica, da confiabilidade da rede e a relação entre essas duas medidas.

Desta seção em diante os resultados foram obtidos baseados no pseudocódigo abaixo, desenvolvido através do SageMath utilizando a linguagem de programação Python. Todos os resultados foram gerados em um *notebook* do modelo Dell Inspiron 14R 3350, com processador Intel Core™ i5, sistema operacional Windows 7 Ultimate de 64 *bits* e 6GB de memória RAM.

Pseudocódigo 1: Rotina de inserção de arestas e cálculo da variação de parâmetros

---

Entrada: Grafo $G(V, E)$

Para $G(V, E)$ **faça**:

1 Calcular a conectividade algébrica do grafo G - $a(G)$

2 Calcular o vetor de Fiedler, $v = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, do grafo G

3 Calcular a confiabilidade do grafo G - $\hat{R}(G, \rho)$

4 Calcular $\alpha = |u_i - u_j|$ para os vértices v_i e v_j não adjacentes

5 Calcular as centralidades de intermediação – $c_b(v)$ – e de *closeness* – $c_c(v)$ – $\forall\, v \in V$

6 Identificar todas as w possibilidades de inserção de arestas e definir um conjunto W cujos elementos são essas possíveis inserções

7 **Para** k variando de 1 até $|W|$ **faça**:

7.1 Inserir a aresta e_k que liga os vértices v_i e v_j, tal que $i \neq j \;\forall\, i, j = 1, .., n$

7.2 Calcular a conectividade algébrica $a(G + e_k)$

7.3 Calcular a confiabilidade $\hat{R}((G + e_k), \rho)$

7.4 Calcular o aumento percentual da conectividade algébrica e da confiabilidade de $(G + e_k)$ com relação à G

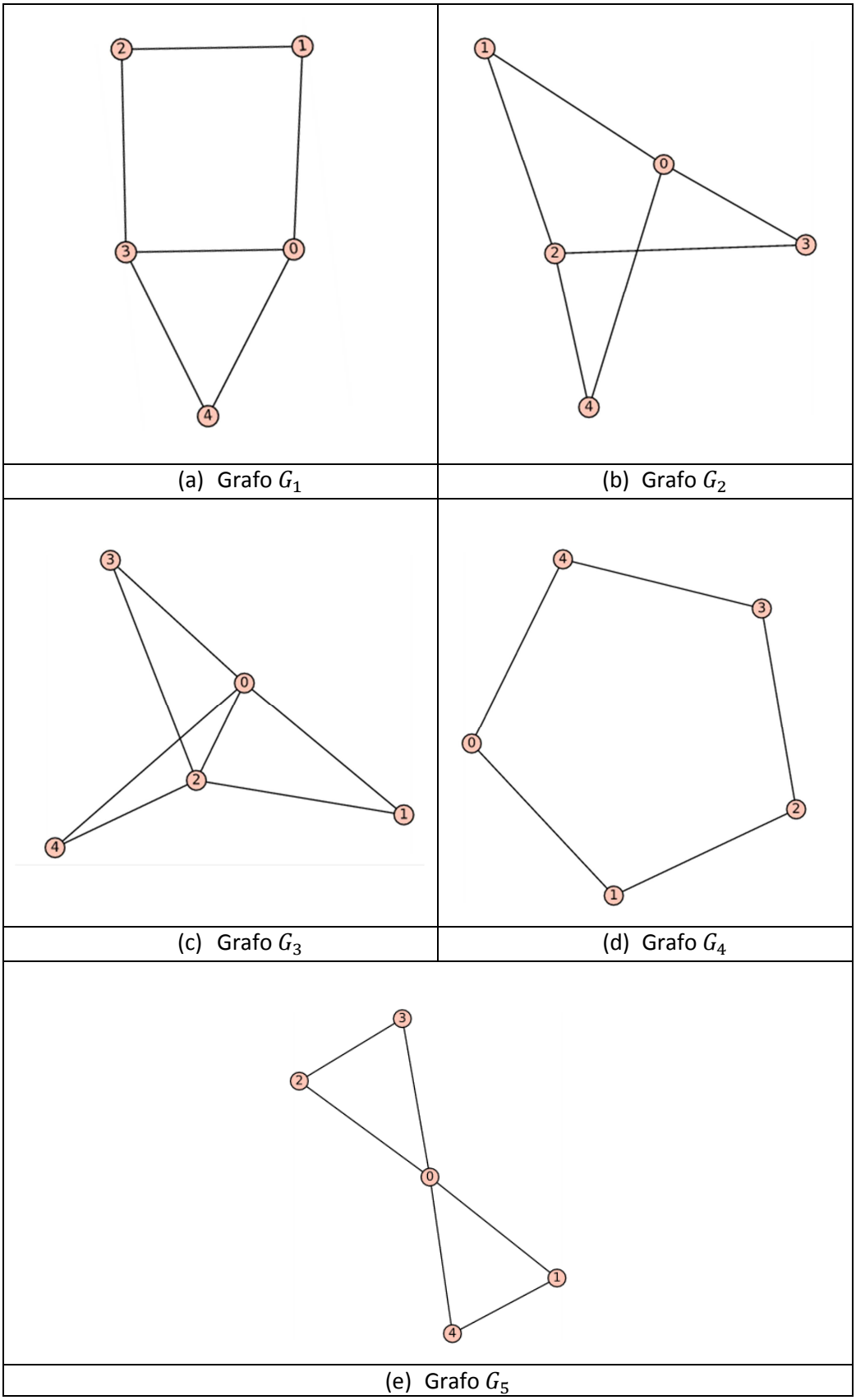
7.5 Remover a aresta e_k

Fim para

Fim para

Saída: Aumento percentual na conectividade algébrica e na confiabilidade da rede após a inserção de uma aresta entre os vértices v_i e v_j.

Inicialmente analisemos todos os grafos conexos com 5 vértices que respeitam a restrição $\lambda(G) = 2$ e tal que todos os respectivos grafos gerados a partir deles pela inserção de uma nova aresta também respeitem esta mesma condição. Neste caso, existem 8 grafos com 5 vértices cuja conectividade de aresta é igual a 2, porém dentre estes grafos, em 5 deles a conectividade de arestas se mantém igual a 2 em todos os novos grafos obtidos após a inserção de uma nova aresta. Esses grafos são apresentados na Figura 4.1.



(a) Grafo G_1 (b) Grafo G_2

(c) Grafo G_3 (d) Grafo G_4

(e) Grafo G_5

Figura 4.1: Grafos com 5 vértices e com conectividade de arestas igual a 2

Para todos os grafos da Figura 4.1 foram realizadas todas as possíveis inserções de arestas. A Tabela 4.1 apresenta uma consolidação de todos estes grafos, indicando para cada aresta incluída em $G_i, 1 \leq i \leq 5$, as principais medidas referentes aos vértices v_i e v_j envolvidos neste aresta inserida bem como os valores de aumento percentual da conectividade algébrica e aumento percentual da confiabilidade da rede, denotado por $\hat{R}(G_i, \rho)$, para $\rho = 0.5$.

Tabela 4.1: Relações entre a inserção de uma aresta e o aumento na confiabilidade do grafo (n =5)

Grafo	$a(G_i)$	$\widehat{R}(G_i, 0.5)$	v_i	v_j	u_i	u_j	$\lvert u_i - u_j \rvert$	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$c_b(v_i)$	$c_b(v_j)$	$c_c(v_i)$	$c_c(v_j)$	$a(G_i + \{v_i, v_j\})$	Aumento % em $a(G_i + \{v_i, v_j\})$	$\widehat{R}(G_i + \{v_i, v_j\}, 0.5)$	Aumento % em $\widehat{R}(G_i + \{v_i, v_j\}, 0.5)$
G_1	1,38	63%	1	4	-2,61	3,23	5,85	2	2	0,50	0	0,6	0,6	2,00	45%	91%	45%
			2	4	-2,61	3,23	5,85	2	2	0,50	0	0,6	0,6	2,00	45%	91%	45%
			0	2	1	-2,61	3,61	3	2	1,50	0,50	0,8	0,6	1,58	14%	88%	40%
			1	3	-2,61	1,00	3,61	2	3	0,50	1,50	0,6	0,8	1,58	14%	88%	40%
G_2	2,00	64%	1	4	1	-1,00	2,00	2	2	0,33	0,33	0,6	0,6	2,00	0%	91%	41%
			1	3	1	0,00	1,00	2	2	0,33	0,33	0,6	0,6	2,00	0%	91%	41%
			3	4	0	-1,00	1,00	2	2	0,33	0,33	0,6	0,6	2,00	0%	91%	41%
			0	2	0	0,00	0,00	3	3	1,50	1,50	0,8	0,8	2,00	0%	86%	39%
G_3	2,00	86%	1	4	1	-1,00	2,00	2	2	0	0	0,6	0,6	2,00	0%	96%	12%
			1	3	1	0,00	1,00	2	2	0	0	0,6	0,6	2,00	0%	96%	12%
			3	4	0	-1,00	1,00	2	2	0	0	0,6	0,6	2,00	0%	96%	12%

Tabela 4.1: Relações entre a inserção de uma aresta e o aumento na confiabilidade do grafo (n =5)

Grafo	$a(G_i)$	$\widehat{R}(G_i, 0.5)$	v_i	v_j	u_i	u_j	$\lvert u_i - u_j \rvert$	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$c_b(v_i)$	$c_b(v_j)$	$c_c(v_i)$	$c_c(v_j)$	$a(G_i + \{v_i, v_j\})$	**Aumento % em** $a(G_i + \{v_i, v_j\})$	$\widehat{R}(G_i + \{v_i, v_j\}, 0.5)$	**Aumento % em** $\widehat{R}(G_i + \{v_i, v_j\}, 0.5)$
G_4	1,38	38%	0	2	1	-1	2	2	2	1	1	0,6	0,6	1,38	0%	63%	67%
			0	3	1	-0,61	1,61	2	2	1	1	0,6	0,6	1,38	0%	63%	67%
			1	3	0	-0,61	0,61	2	2	1	1	0,6	0,6	1,38	0%	63%	67%
			1	4	0	0,61	0,61	2	2	1	1	0,6	0,6	1,38	0%	63%	67%
			2	4	-1	0,61	1,61	2	2	1	1	0,6	0,6	1,38	0%	63%	67%
G_5	1,00	59%	1	2	1	-1	2	2	2	0	0	0,6	0,6	1,58	59%	87,5%	47%
			1	3	1	-1	2	2	2	0	0	0,6	0,6	1,58	59%	87,5%	47%
			2	4	-1	1	2	2	2	0	0	0,6	0,6	1,58	59%	87,5%	47%
			3	4	-1	1	2	2	2	0	0	0,6	0,6	1,58	59%	87,5%	47%

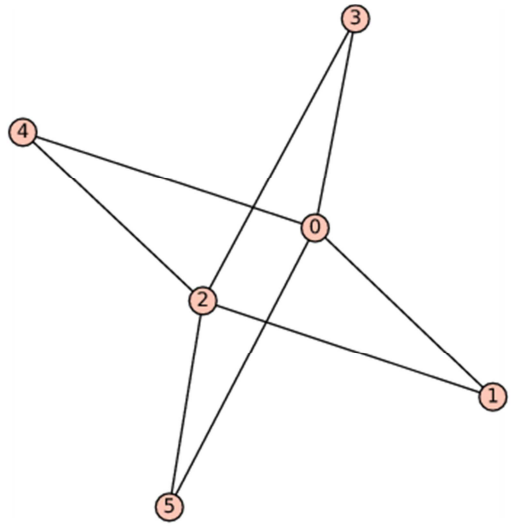
Todos os grafos tiveram aumento na confiabilidade, porém apenas os grafos G_1 e G_2 apresentaram valores de confiabilidade diferentes entre as novas redes geradas após a inserção de uma nova aresta. Nestes casos a escolha da aresta a ser inserida foi decisiva para se obter o aumento máximo da confiabilidade. Pelos resultados mostrados na Tabela 4.1 é possível observar um pequeno indício de correlação entre o aumento da conectividade algébrica, através da estratégia do vetor de Fiedler, e a confiabilidade do grafo obtido após a inserção dessa nova aresta.

No caso de G_1, a confiabilidade teve um aumento máximo de 45%, obtida através da ligação entre os vértices v_2 e v_4 ou v_1 e v_4. Em ambos os casos, o maior aumento da confiabilidade também foi acompanhado pelo maior incremento da conectividade algébrica, com também 45% de aumento quando comparado ao valor da conectividade do grafo original. Além disso, nestes dois casos estes vértices apresentaram os menores graus da rede, bem como a maior diferença $\alpha = |u_i - u_j|$ referente ao vetor de Fiedler, além de também possuírem os menores valores de centralidade de intermediação e de proximidade.

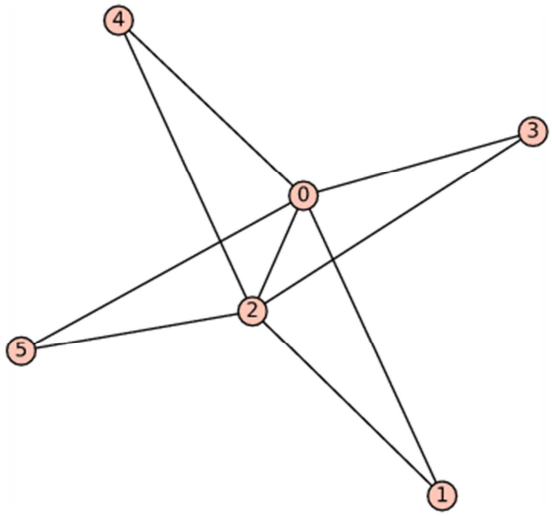
Já no caso de G_2, dentre as 4 possibilidades de adição de arestas são 3 aquelas que apresentam o maior aumento da confiabilidade da rede, de 41%. Embora, neste caso, nenhum dos novos grafos tenha gerado aumento na conectividade algébrica, novamente podemos verificar que os vértices com menor grau e com maior diferença $|u_i - u_j|$ estão entre aqueles que geraram o maior incremento da confiabilidade.

Em todos os demais grafos da Figura 4.1 o percentual de aumento da confiabilidade da rede foi mesmo para todas as possibilidades de inserção de arestas, não cabendo conclusão a respeito da relação com o aumento no valor da conectividade algébrica.

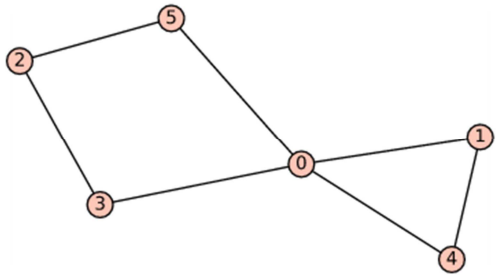
A mesma metodologia foi utilizada para grafos com 6 vértices. Neste caso, são 41 redes com $\lambda(G) = 2$, dentre as quais 18 foram estudadas, pois possuem a mesma conectividade de arestas em todas as possíveis inserções de arestas, garantindo a eficiência de tempo computacional para o cálculo da função de confiabilidade. Estas 18 redes são apresentadas na Figura 4.2.



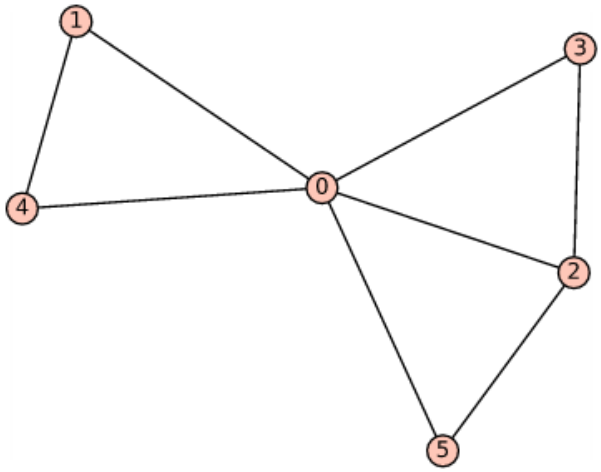
(a) Grafo G_1



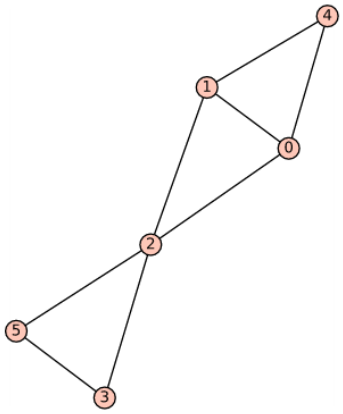
(b) Grafo G_2



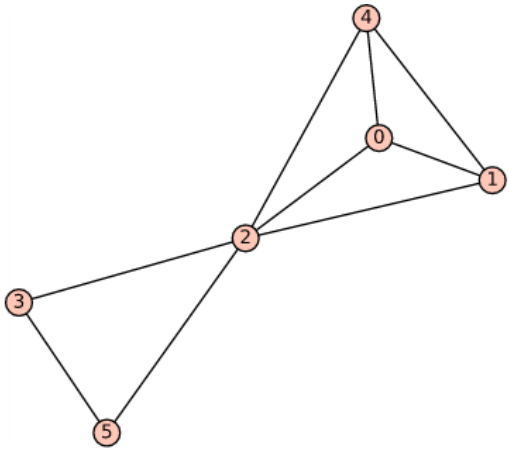
(c) Grafo G_3



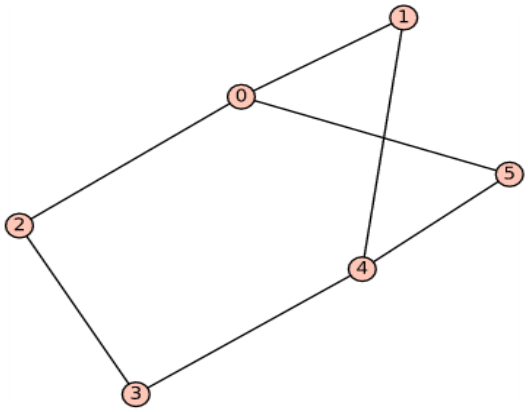
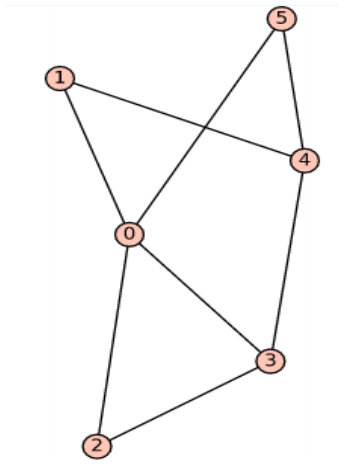
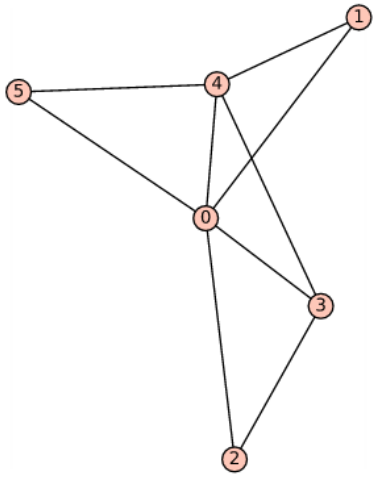
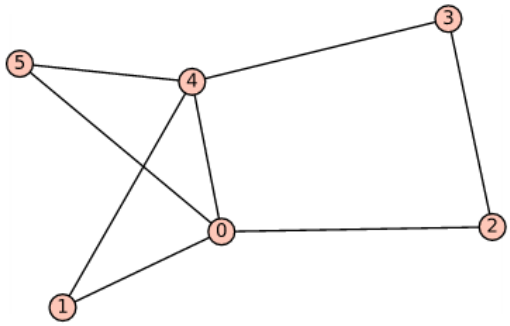
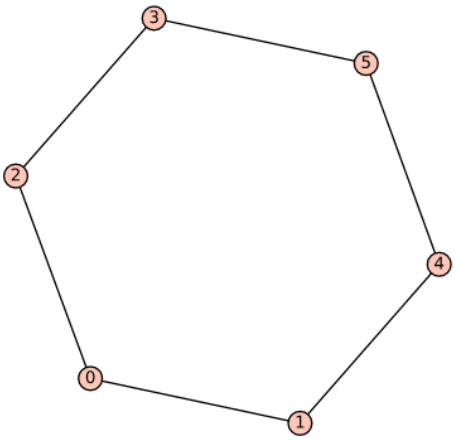
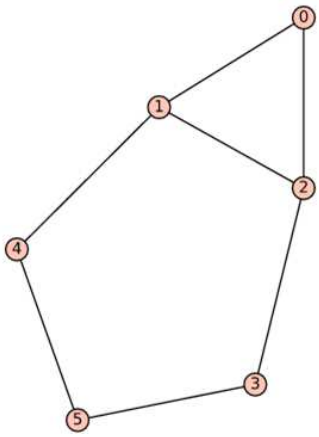
(d) Grafo G_4

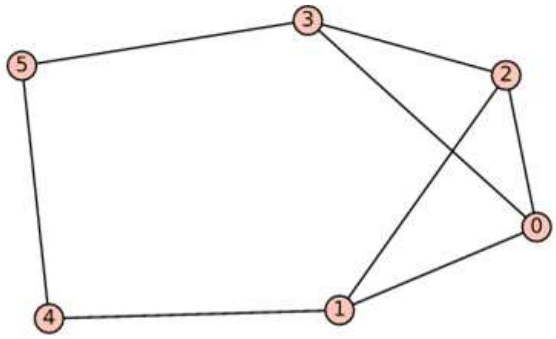


(e) Grafo G_5

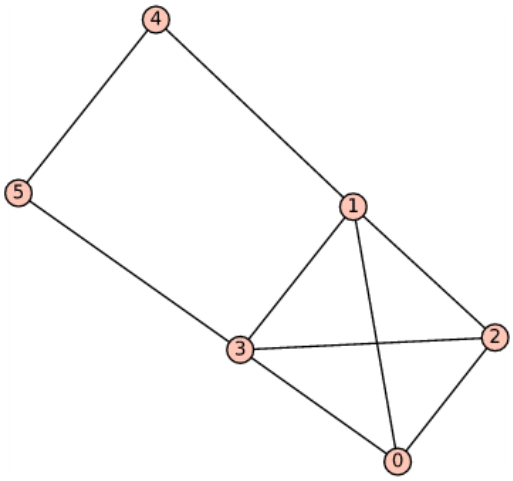


(f) Grafo G_6

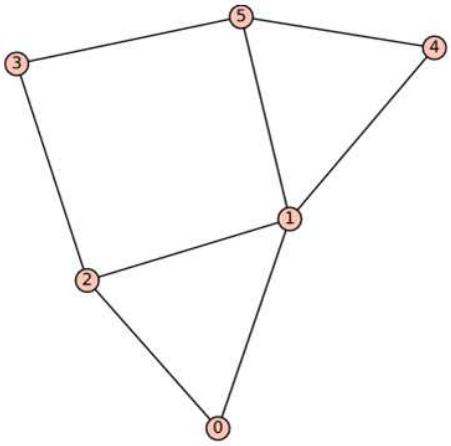
<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>(g) Grafo G_7</td><td>(h) Grafo G_8</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>(i) Grafo G_9</td><td>(j) Grafo G_{10}</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>(k) Grafo G_{11}</td><td>(l) Grafo G_{12}</td></tr>
</table>



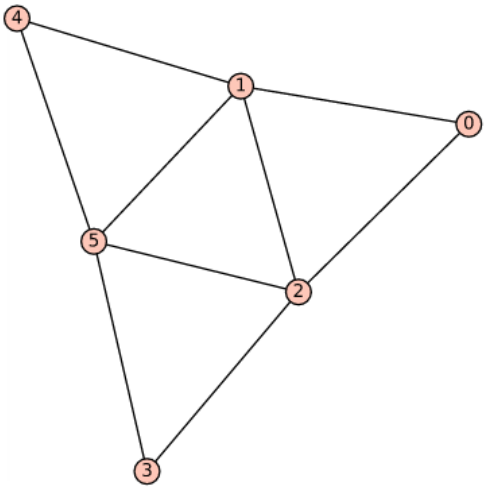
(m) Grafo G_{13}



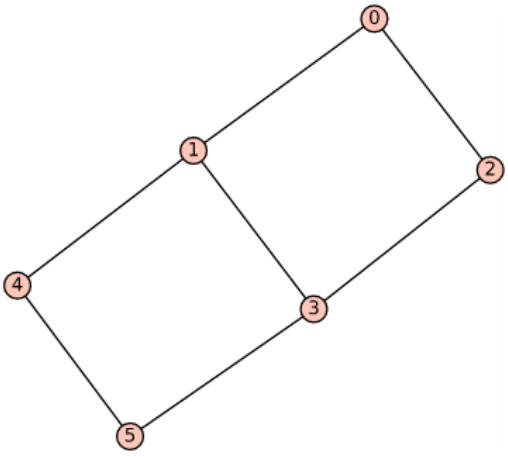
(n) Grafo G_{14}



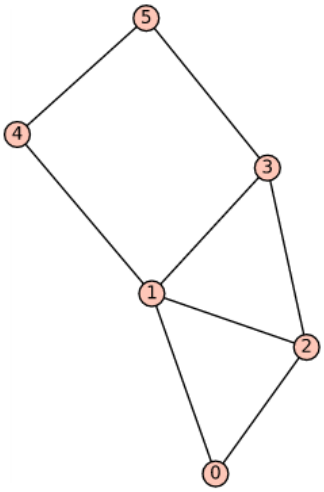
(o) Grafo G_{15}



(p) Grafo G_{16}



(q) Grafo G_{17}



(r) Grafo G_{18}

Figura 4.2: Grafos com 6 vértices com conectividade de arestas igual a 2

Dado o maior número de grafos gerados para $n = 6$ optamos por apresentar sua tabela de resultados no Apêndice A e resumi-los a seguir. Dentre todos os 18 grafos mostrados na Figura 4.2, são 11 aqueles nos quais o maior aumento no valor da conectividade algébrica se deu através da inserção de uma aresta entre os vértices com maior diferença $|u_i - u_j|$, representando 62% do total. Em apenas 2 das redes (grafos G_8 *e* G_9) o maior aumento de $a(G)$ não está relacionado com o vetor de Fiedler. Nos 5 outros casos, todos os aumentos percentuais de $a(G)$ são iguais, independentemente da diferença $|u_i - u_j|$.

Já para a relação do vetor de Fiedler com o incremento da confiabilidade são 14 as redes nas quais a inserção de uma aresta entre os vértices com maior diferença $|u_i - u_j|$ trouxe o maior aumento percentual da confiabilidade, representando 77% do total. Somente na rede modelada pelo grafo G_4 o maior aumento de $\hat{R}(G, 0.5)$ não foi acompanhado pela maior diferença do vetor de Fiedler. Em todos os 3 outros casos os aumentos percentuais na confiabilidade foram os mesmos, independentemente da aresta inserida.

Por fim, fazemos uma relação entre o maior aumento de $a(G)$ e de $\hat{R}(G, 0.5)$. De todos os 18 grafos, em 15 casos (83% do total) o melhor incremento da conectividade algébrica também foi acompanhado pelo maior aumento da confiabilidade. Os casos que não respeitam essa regra são justamente os grafos G_4, G_8 e G_9 apresentados acima. Uma característica em comum entre os grafos G_4 e G_9 é a existência de um vértice universal, isto é, um vértice com grau 5, o que pode eventualmente afetar o resultado, uma vez que para o vértice universal não existe a possibilidade de inserção de novas arestas. Com o objetivo de verificar se esse padrão se repete é necessária a realização de mais testes computacionais em redes com vértices universais. Para isso, destinamos a Seção 4.3 exclusivamente para a análise desses casos.

4.2 INSERÇÃO DE ARESTAS E O AUMENTO DA CONECTIVIDADE ALGÉBRICA E DA CONFIABILIDADE DA REDE – REDES REAIS

Apresentamos agora uma análise similar àquela mostrada na Seção 4.1, porém utilizando redes reais obtidas da base de dados de redes Topology Zoo [45]. O método de inserção de arestas e cálculo da confiabilidade é o mesmo que aquele mostrado no Pseudocódigo 1, porém com a probabilidade de falha em arestas, ρ, arbitrada em 0,1. A Tabela 4.2 apresenta as redes utilizadas com seus respectivos números de vértices, n, número

de arestas, m, e número de conjuntos de cortes de cardinalidade λ e $\lambda + 1$, através da utilização de uma rotina desenvolvida em Python compilada no CoCalc.

Tabela 4.2: Redes Topology Zoo

Rede	n	m	m_λ	$m_{\lambda+1}$	Rede	n	m	m_λ	$m_{\lambda+1}$
Aarnet	19	22	6	131	**GetNet**	7	8	2	17
Abilene	11	14	11	142	**GlobalNetRu**	8	7	7	21
ATMnet	21	22	2	124	**GRENA**	16	15	15	105
BBNplanet	27	28	17	344	**ILAN**	14	15	9	93
BSONetworkSolutions	18	23	7	139	**JGN2plus-Japan**	18	17	17	136
BT Europe	23	37	7	242	**KAREN**	25	28	13	290
Claranet	15	18	6	97	**KREONET**	13	12	12	66
Compuserve	15	31	3	53	**MARWAN**	16	15	15	105
DataXChange	6	11	1	10	**NSF**	13	14	3	56
EasyNet	19	24	6	134	**PIONIER**	36	39	13	497
EEnet	13	13	10	78	**Restena**	19	20	9	154
Epoc	6	7	6	35	**Rhnet**	16	18	5	100
ERNET	30	31	24	450	**RNP**	31	34	15	429
FUNET	25	30	3	134	**T-lex**	12	13	8	70
Gambia	28	28	17	361	**TWAREN**	20	19	19	171

Primeiramente, dentre todas as possibilidades de inserção de arestas existentes para cada uma das redes mostradas na tabela acima, vamos analisar o aumento na conectividade algébrica e na confiabilidade da rede avaliando as seguintes estratégias de inserção de aresta: (i) ligação entre os vértices com menores graus; (ii) ligação entre os vértices com menor medida de centralidade de *closeness* e (iii) ligação entre os vértices com maior diferença de suas respectivas entradas do vetor de Fiedler, denotadas por $\alpha = |u_i - u_j|$.

Nas 30 redes analisadas, em 7 casos (23% do total) as estratégias (i) e (iii) obtiveram o maior incremento em $a(G)$, isto é o incremento máximo em $a(G)$ dentre todos os possíveis, enquanto que o resultado foi de apenas 3 redes que obtiverem o incremento máximo em $a(G)$ utilizando a estratégia (ii), conforme mostra o Gráfico 4.1.

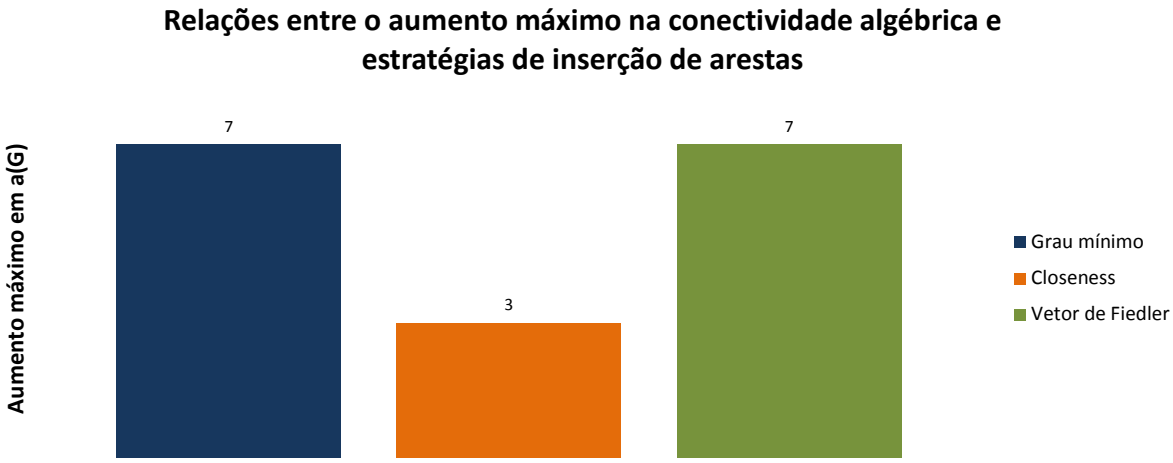


Gráfico 4.1: Incremento máximo na conectividade algébrica e estratégias de inserção de arestas

Como pode ser visto o método da ligação entre os vértices com os menores valores de centralidade de *closeness* foi aquele menos eficaz quando comparado aos demais. A Tabela 4.3 apresenta, para cada uma das estratégias de inserção de arestas, as redes nas quais foi obtido o maior aumento da conectividade algébrica a partir de cada uma das estratégias apresentadas.

Tabela 4.3: Redes com aumento ótimo de conectividade algébrica por estratégia de inserção de aresta

Grau mínimo	***Closeness***	**Vetor de Fiedler**
Abilene	Abilene	Abilene
DataXChange	DataXChange	DataXChange
Epoc	Epoc	Epoc
ERNET	-	ERNET
FUNET	-	BBNplanet
PIOINIER		PIONIER
T-lex	-	T-lex

Como mostra a tabela, alguns grafos se enquadram em mais de uma categoria. Por exemplo, para a rede Abilene o par de vértices que traz o maior incremento da conectividade algébrica é tanto aquele par que possui grau mínimo, como também o par com menores valores de centralidade de *closeness* como também o par de vértices com maior α. A Figura 4.3 mostra a rede Abilene e a Tabela 4.4 apresenta um resumo de algumas possibilidades de inserção de arestas para esta rede.

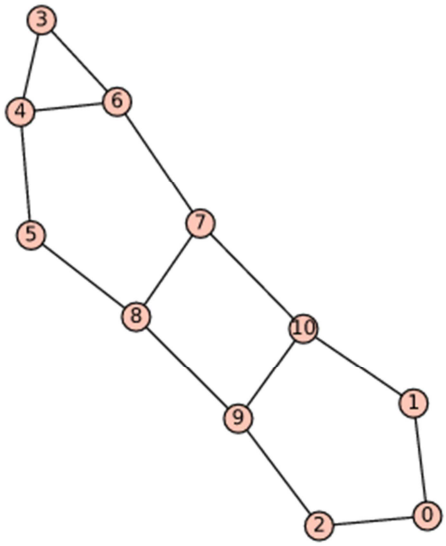


Figura 4.3: Rede Abilene

Tabela 4.4: Exemplos de inserção de arestas - rede Abilene

$a(G)$	v_i	v_j	u_i	u_j	$\lvert u_i - u_j \rvert$	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$c_c(v_i)$	$c_c(v_j)$	$a(G+\{v_i,v_j,\})$	**Aumento % em** $a(G+\{v_i,v_j,\})$
0,32	0	3	1	-0,96	1,96	2	2	0,33	0,33	0,74	129%
	0	4	1	-0,86	1,86	2	3	0,33	0,38	0,73	126%
	2	3	0,84	-0,96	1,80	2	2	0,37	0,33	0,62	93%
	1	3	0,83	-0,96	1,79	2	2	0,38	0,33	0,63	95%
	0	6	1	-0,74	1,74	2	3	0,33	0,43	0,65	102%
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

É importante ressaltar que o resultado baixo, de apenas 23% de acerto para a estratégia do vetor de Fiedler, não contradiz a teoria a respeito dessa estratégia apresentada nas Seções 3.1 e 3.2. Nos resultados mostrados na Seção 3.2 foram mostrados fortes indícios de correlação positiva entre o aumento na conectividade algébrica e α, ou seja, quanto maior α maior a *probabilidade* de se obter um aumento significativo em $a(G)$. No entanto, essa estratégia não garante o melhor aumento dentre todos os possíveis, conforme mostram os resultados obtidos nestes casos. Além disso, estes resultados mostraram não existir diferença significativa entre as estratégias da ligação entre os vértices de grau mínimo e a ligação entre os vértices com maior diferença do vetor de Fiedler, uma vez que ambos trouxeram o maior aumento em 7 redes.

Este ponto fica mais claro ao analisarmos o Gráfico 4.2. Nele são mostrados, para todas as redes em estudo, o aumento máximo na conectividade algébrica, o maior aumento

através da inserção de uma aresta entre os vértices de menor grau e, por fim, o aumento obtido pela inserção de uma aresta utilizando o vetor de Fiedler. Em 90% de todas as 30 redes analisadas, o vetor de Fiedler teve resultado melhor ou igual quando comparado com uma aresta inserida entre os vértices de menor grau. As três redes nas quais essa tendência não se manteve foram: FUNET, JGN2plus-Japan e KAREN. A Figura 4.4 apresenta a rede FUNET e a Tabela 4.5 apresenta algumas possíveis inserções de aresta dessa rede, a fim de exemplificar essas exceções, mostrando que para esse grafo a ligação entre os vértices com menor grau teve um melhor aumento na conectividade algébrica, quando comparada com o vetor de Fiedler.

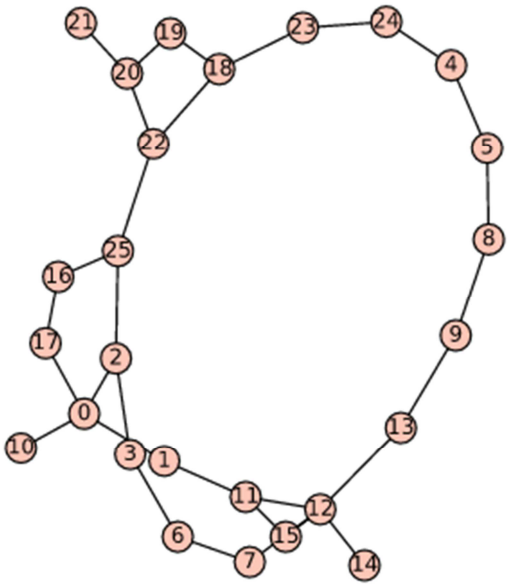


Figura 4.4: Rede FUNET

Tabela 4.5: Exemplos de inserção de arestas - rede FUNET

$a(G)$	v_i	v_j	u_i	u_j	$\lvert u_i - u_j \rvert$	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$c_c(v_i)$	$c_c(v_j)$	$a(G+\{v_i,v_j,\})$	**Aumento % em** $a(G+\{v_i,v_j,\})$
0,116	14	21	1,92	-2,51	4,44	1	1	0,20	0,17	0,140	20%
	15	21	1,81	-2,51	4,33	2	1	0,22	0,17	0,141	22%
	11	21	1,72	-2,51	4,23	3	1	0,25	0,17	0,143	22%
	10	21	1,13	-2,51	3,64	1	1	0,21	0,17	0,149	29%
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Por fim, em 100% dos casos o vetor de Fiedler foi uma estratégia melhor que a centralidade de *closeness*. Ademais, também fica claro no Gráfico 4.2 que os resultados obtidos através de α estão geralmente bem próximos ao maior aumento possível em $a(G)$.

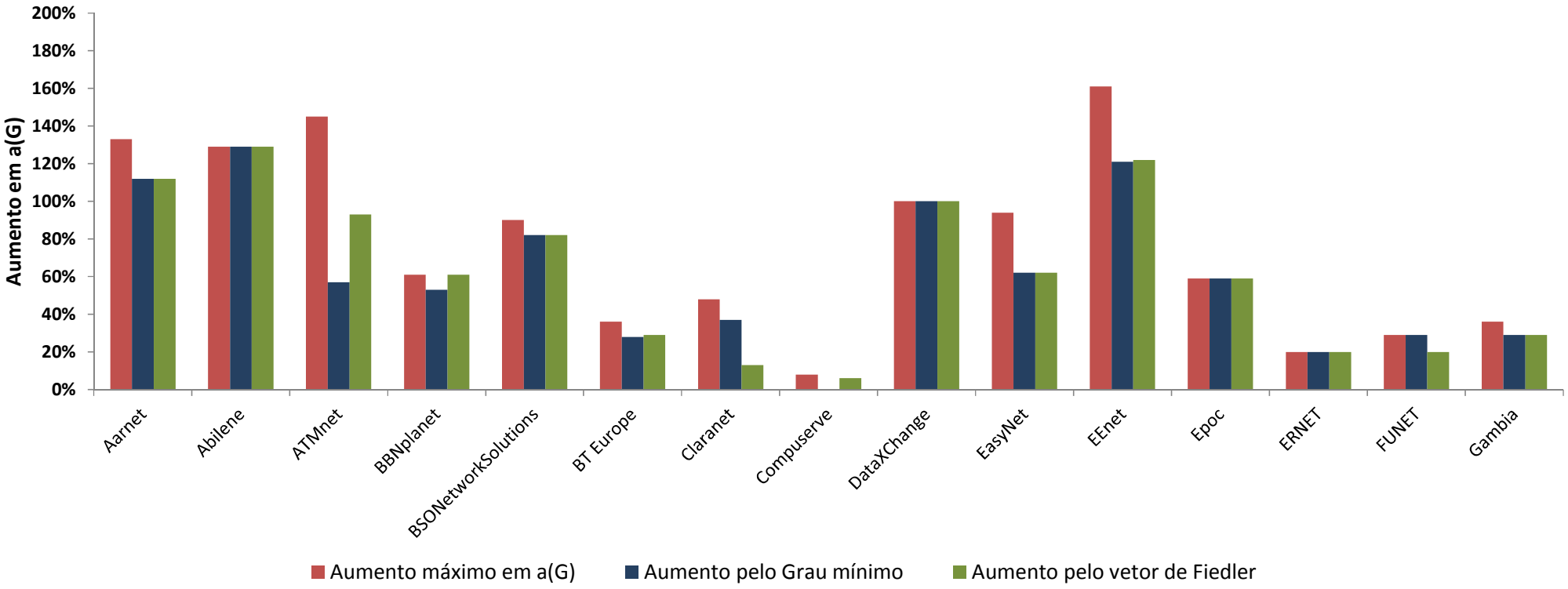


Gráfico 4.2: Análise comparativa entre o maior incremento na conectividade algébrica, grau mínimo e vetor de Fiedler

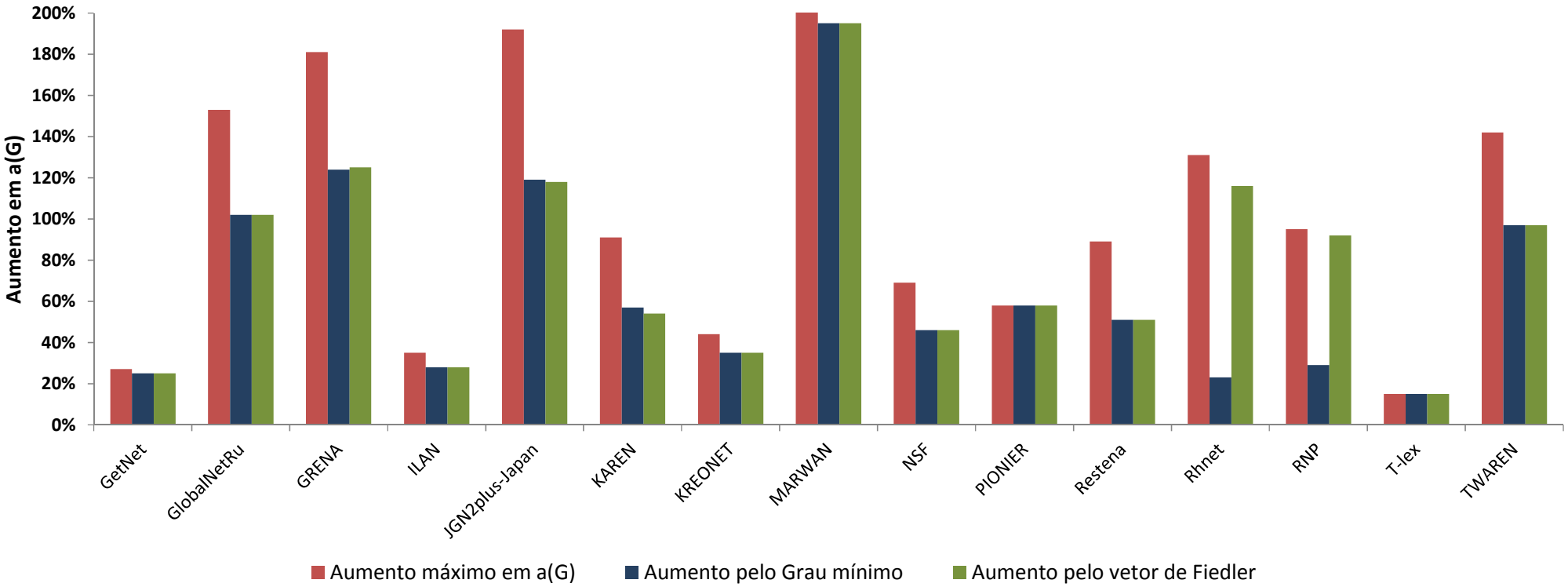


Gráfico 4.3: Análise comparativa entre o maior incremento na conectividade algébrica, grau mínimo e vetor de Fiedler

De acordo com a análise comparativa mostrada no Gráfico 4.2, podemos observar que, por exemplo, na rede Rhnet a estratégia de inserção de aresta através do vetor de Fiedler obteve resultados próximos do ótimo, o que pode ser observado a Tabela 4.6. Nesse caso, a estratégia de ligação entre os vértices de menor grau propõe uma aresta entre os vértices v_4 e v_7, enquanto o vetor de Fiedler sugere a inserção de uma aresta entre os vértices v_2 e v_7 ou v_0 e v_7, conforme mostra a Tabela 4.6, que apresenta algumas das possíveis inserções de arestas na rede Rhnet.

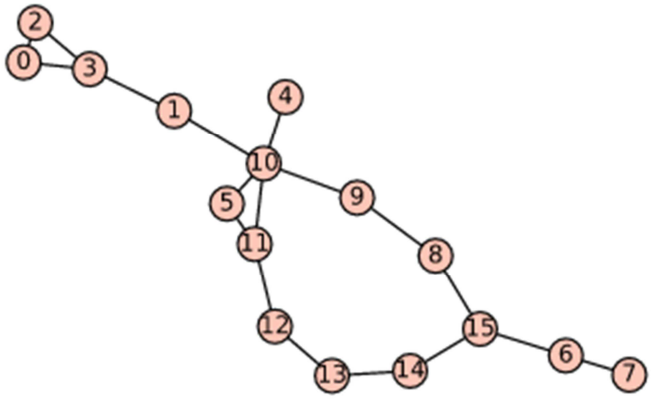


Figura 4.5: Rede Rhnet

Tabela 4.6: Exemplos de inserção de arestas e conectividade algébrica - rede Rhnet

$a(G)$	v_i	v_j	u_i	u_j	$\lvert u_i - u_j \rvert$	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$a(G + \{v_i, v_j,\})$	**Aumento % em** $a(G + \{v_i, v_j,\})$
0,12	0	7	1	-0,86	1,86	2	1	0,59	116%
	2	7	1	-0,86	1,86	2	1	0,59	116%
	0	6	1	-0,75	1,75	2	2	0,27	131%
	4	7	0,14	-0,86	1,00	1	1	0,14	23%
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Agora apresentamos as análises das redes do Topology Zoo utilizando as estratégias de inserção de arestas e avaliando o impacto na confiabilidade da rede. Dos 30 casos, em 27 o maior aumento na confiabilidade foi obtido através da inserção de arestas entre o par de vértices com menor grau, o que representa uma assertividade de 90%. O resultado para a ligação entre os vértices com menor centralidade de *closeness* foi de 14, o que representa 46% de acerto e, por fim, para a estratégia do vetor de Fiedler tivemos 26 redes, ou seja, 86% do total – um resultado levemente inferior quando comparado com a estratégia de grau mínimo,

conforme mostra o Gráfico 4.3. A Tabela 4.7 apresenta para cada uma destas estratégias quais redes resultaram no aumento máximo da confiabilidade.

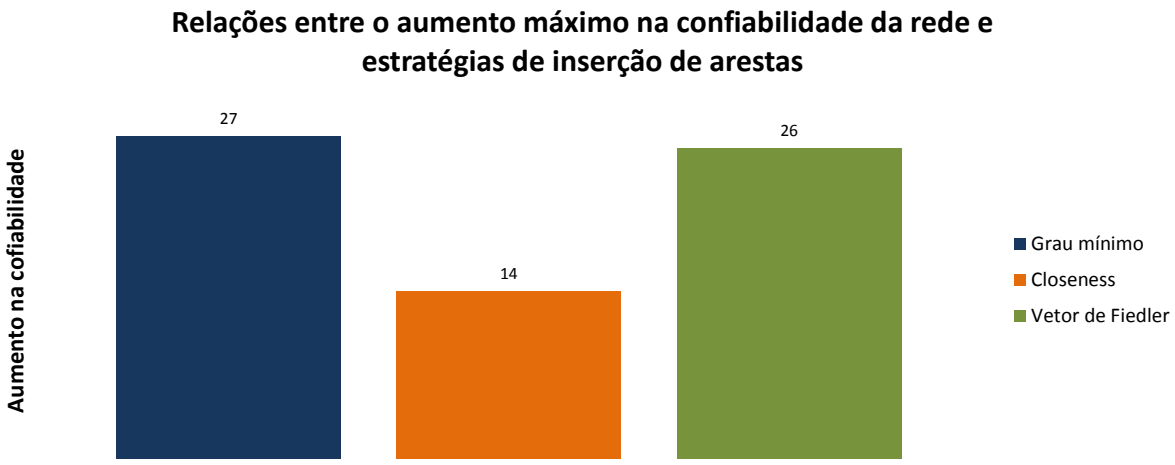


Gráfico 4.4: Incremento máximo na confiabilidade da rede e estratégias de inserção de arestas

Tabela 4.7: Redes com aumento máximo de confiabilidade por estratégia de inserção de aresta

Grau mínimo		***Closeness***	**Vetor de Fiedler**	
Aarnet	GetNet	Aarnet	Aarnet	GlobalNetRu
Abilene	GlobalNetRu	Abilene	Abilene	GRENA
BBNplanet	GRENA	BBNplanet	ATMnet	ILAN
BSONetworkSolutions	ILAN	BT Europe	BBNplanet	JGN2plus-Japan
BT Europe	JGN2plus-Japan	DataXChange	BSONetworkSolutions	KAREN
Claranet	KAREN	EasyNet	BT Europe	KREONET
Compuserve	KREONET	Epoc	Claranet	MARWAN
DataXChange	MARWAN	ERNET	DataXChange	NSF
EasyNet	NSF	GlobalNetRu	EasyNet	Restena
EEnet	PIONIER	ILAN	EEnet	Rhnet
Epoc	Restena	KREONET	Epoc	RNP
FUNET	RNP	MARWAN	ERNET	TWAREN
Gambia	T-lex	NSF	FUNET	-
Aarnet	-	Restena	GetNet	-

Assim como no caso do aumento da conectividade algébrica, dentre as 30 redes em análise, algumas delas obtiveram o incremento máximo de confiabilidade através das 3 estratégias de inserção de arestas. Ou seja, nesses casos o par de vértices que ao ser ligado traz o maior aumento de $\hat{R}(G)$ é aquele que tanto possui graus mínimos, como também valores de centralidade de *closeness* mínimos e também maior diferença α.

Para exemplificar um caso desse tipo, tomemos o caso da rede MARWAN, mostrada na Figura 4.6. A Tabela 4.8 apresenta um resumo das possíveis inserções de arestas para esse caso. Como pode ser observado, o maior incremento na confiabilidade da rede acontece através da ligação entre o par de vértices v_5 e v_{11}, sendo esse par aquele com os menores graus da rede ($d(v_5) = d(v_{11}) = 1$), com os menores valores de centralidade de *closeness* e, também, com o maior α, tal que $\alpha = 2{,}20$.

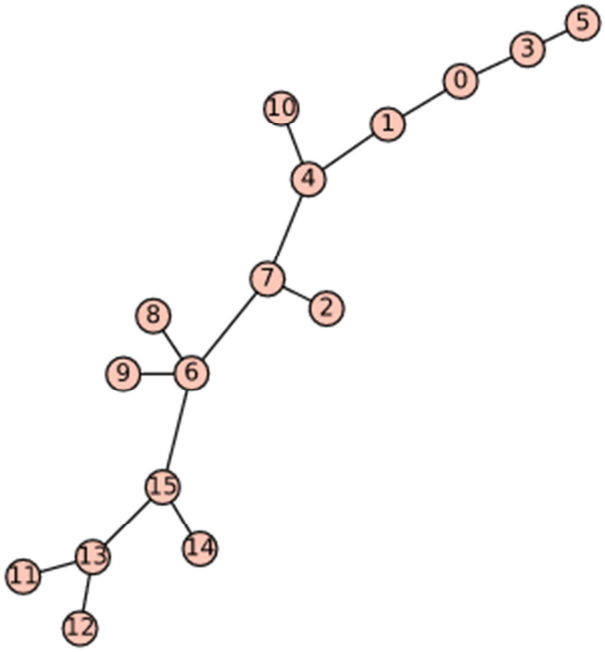


Figura 4.6: Rede MARWAN

Tabela 4.8: Exemplos de inserção de arestas - rede MARWAN

$\widehat{R}(G)$	v_i	v_j	u_i	u_j	$\lvert u_i - u_j \rvert$	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$c_c(v_i)$	$c_c(v_j)$	$\widehat{R}(G + \{v_i, v_j\})$	**Aumento % em** $\widehat{R}(G + \{v_i, v_j\})$
0,38	5	11	1,28	-0,92	2,20	1	1	0,17	0,21	60%	54%
	5	12	1,28	-0,92	2,20	1	1	0,17	0,21	60%	54%
	5	13	1,28	-0,85	2,13	1	3	0,17	0,27	58%	49%
	3	11	1,18	-0,92	2,11	2	1	0,20	0,21	58%	49%
	3	12	1,18	-0,92	2,11	2	1	0,20	0,21	58%	49%
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Quando observadas todas as 30 redes em estudo, a estratégia de inserção de aresta entre vértices com grau mínimo foi a melhor opção para o incremento da confiabilidade da rede. Em 90% dos casos, o que representa 27 redes, esse método teve resultado de aumento da confiabilidade igual ou superior quando comparado com a estratégia do vetor de Fiedler. As exceções para esse caso foram as redes ATMnet, ERNET e Rhnet. Tomemos como exemplo dentre essas exceções a rede Rhnet, cujas possibilidades de inserção de arestas são apresentadas na Tabela 4.9. Como pode ser observado, a ligação entre os vértices de grau mínimo ($d(v) = 1$) trouxe um aumento em $\hat{R}(G)$ de apenas 20%, enquanto a inserção de uma aresta entre o par de vértices com maior α obteve um aumento de 26%.

Tabela 4.9: Exemplos de inserção de arestas e confiabilidade - rede Rhnet

$\widehat{R}(G)$	v_i	v_j	u_i	u_j	$\lvert u_i - u_j \rvert$	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$\widehat{R}(G + \{v_i, v_j\})$	**Aumento % em** $\widehat{R}(G + \{v_i, v_j\})$
0,73	0	7	1	-0,86	1,86	2	1	0,92	26%
	2	7	1	-0,86	1,86	2	1	0,92	26%
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	4	7	0,14	-0,86	1	1	1	0,88	20%
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

A rede Aarnet, mostrada na Figura 4.7, exemplifica um caso no qual a estratégia do grau mínimo foi aquela que trouxe o melhor aumento para a confiabilidade da rede. A Tabela 4.10 apresenta as inserções de arestas dessa rede e nela pode-se ver que a ligação entre os vértices v_5 e v_{18} foi aquela que resultou no maior aumento da confiabilidade da rede.

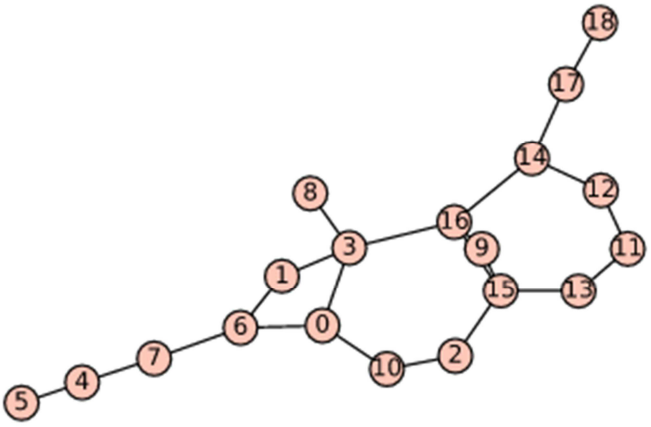


Figura 4.7: Rede Aarnet

Tabela 4.10: Exemplos de inserção de arestas e confiabilidade - rede Aarnet

$\widehat{R}(G)$	v_i	v_j	u_i	u_j	$\lvert u_i - u_j \rvert$	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$\widehat{R}(G + \{v_i, v_j\})$	Aumento % em $\widehat{R}(G + \{v_i, v_j\})$
	5	18	6,1	-3,7	9,8	1	1	0,93	21%
	5	17	6,1	-3,3	9,4	1	2	0,91	17%
0,77	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	8	18	0,4	-3,7	4,2	1	1	0,88	14%
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

No entanto, nota-se na Tabela 4.10 que embora o par de vértices v_8 e v_{18} também tenha grau igual a 1, o aumento da confiabilidade da rede é inferior aquele obtido pelos vértices v_5 e v_{18}.

O Gráfico 4.4 mostra, para cada uma das redes, o maior aumento percentual obtido em $\hat{R}(G)$ e os respectivos aumentos percentuais obtidos pelas estratégias do grau mínimo e do vetor de Fiedler. Podemos notar que em 23 redes o aumento entre estas duas estratégias foi exatamente o mesmo, o que representa 76% dos casos.

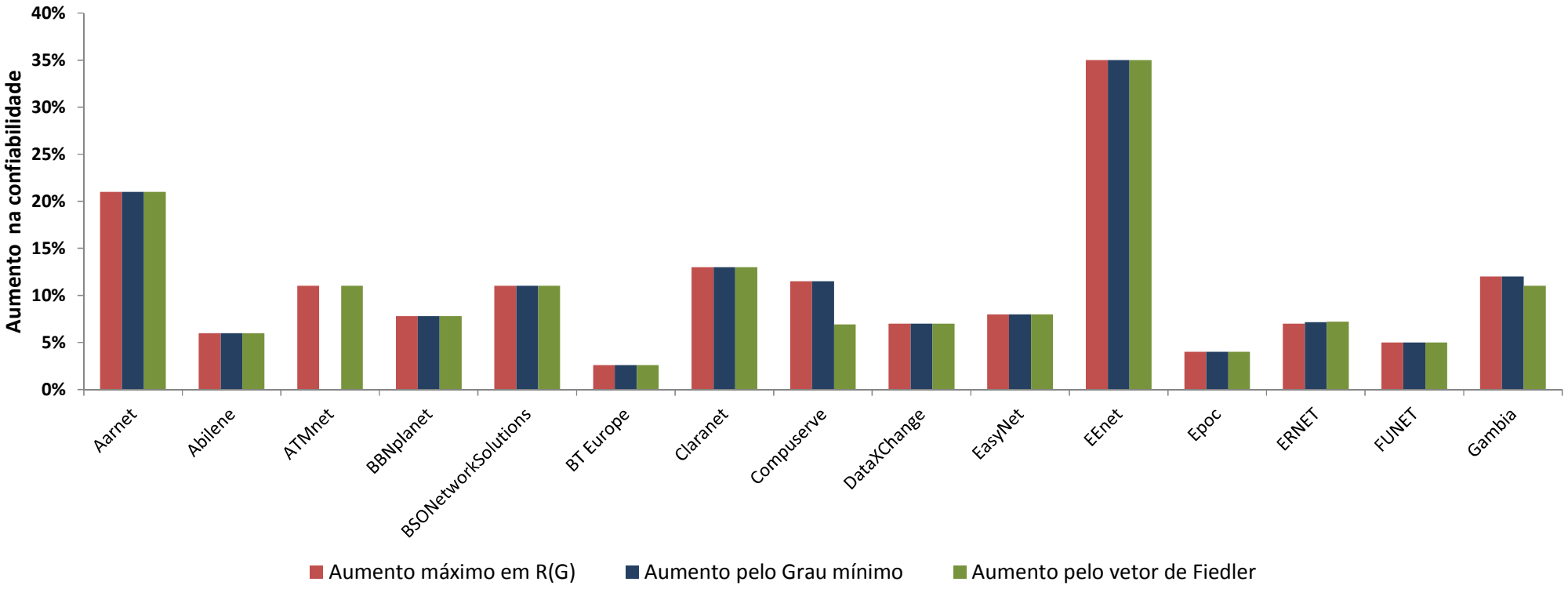


Gráfico 4.5: Análise comparativa entre o maior incremento na confiabilidade da rede, grau mínimo e vetor de Fiedler

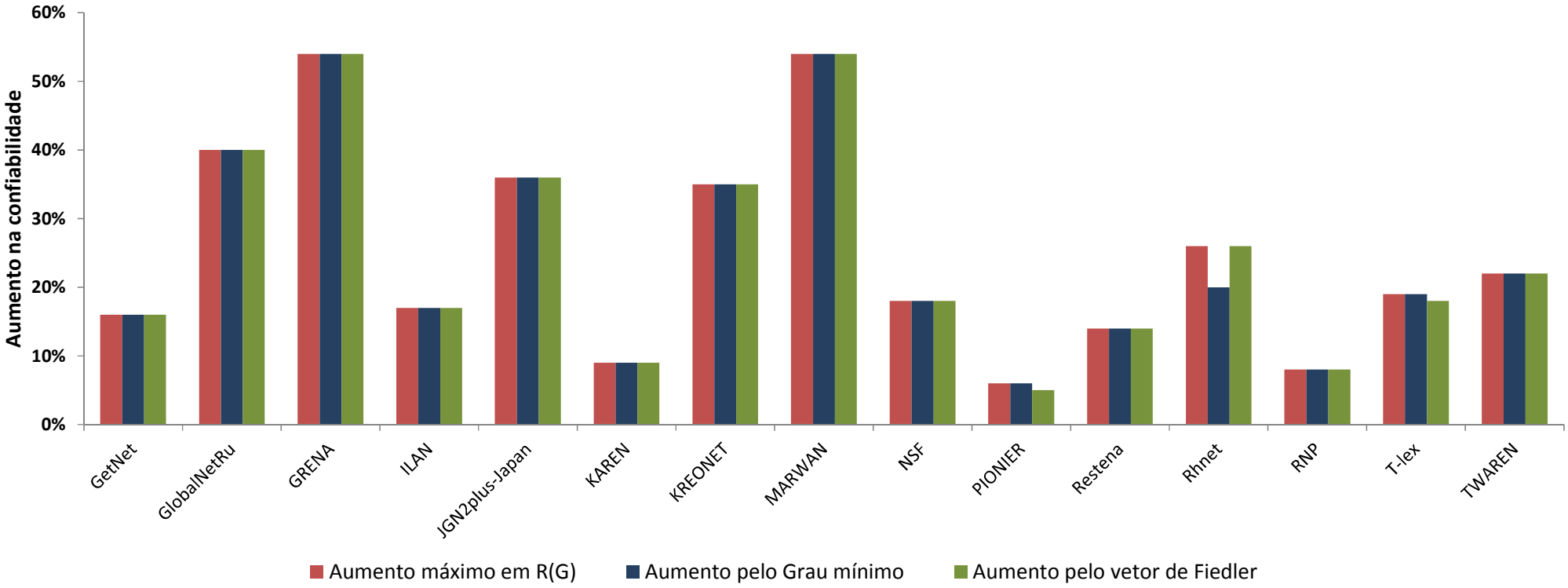


Gráfico 4.6: Análise comparativa entre o maior incremento na confiabilidade da rede, grau mínimo e vetor de Fiedler

Pelas análises apresentadas até o momento, pode-se observar que a estratégia da inserção de arestas entre os vértices com maior diferença entre as entradas do vetor de Fiedler não foi uma boa abordagem para incremento da confiabilidade, uma vez que essa estratégia apresentou resultados muito similares – e até inferiores – quando comparada com a estratégia de inserção de aresta entre os vértices de menor grau, que além de ter tido resultados melhores também é computacionalmente menos custosa, uma vez que não há a necessidade de se calcular o autovetor de Fiedler para o grafo em questão.

No entanto, os resultados apresentados para a estratégia do grau mostram o maior aumento de confiabilidade obtido dentre todas as possibilidades de inserção de arestas entre os vértices de menor grau. Porém, para se chegar nesse número houve a necessidade de realizar todas as possibilidades de inserção de arestas entre os vértices com menores graus e, posteriormente, o cálculo da confiabilidade para cada um destes casos, o que aumenta significativamente o tempo computacional, a depender do total de possibilidades existentes.

A Tabela 4.11 apresenta o total de possibilidades de inserção de arestas para a estratégia de ligação entre vértices de menor grau, denotada na Tabela 4.11 por ω. Como base comparativa, é apresentada também o total de possibilidades de inserção de aresta para o vetor de Fiedler, isto é, o número de combinação de inserção de arestas que resultam em um valor de α máximo e que também deveriam ser testadas uma a uma a fim de avaliar o maior incremento na confiabilidade da rede, denotada na Tabela 4.11 por φ.

Tabela 4.11: Total de possibilidades de inserção de arestas - estratégia de vértices de menor grau e estratégia do vetor de Fiedler

Rede	ω	φ	Rede	ω	φ
Aarnet	3	1	**GetNet**	1	1
Abilene	8	1	**GlobalNetRu**	10	4
ATMnet	1	1	**GRENA**	21	2
BBNplanet	136	4	**ILAN**	36	4
BSONetwork	15	1	**JGN2plus**	55	4
BT Europe	21	4	**KAREN**	66	2
Claranet	15	2	**KREONET**	45	2
Compuserve	3	6	**MARWAN**	28	2
DataXChange	4	4	**NSF**	3	1
EasyNet	15	3	**PIONIER**	36	2
EEnet	28	6	**Restena**	36	2
Epoc	4	4	**Rhnet**	1	2
ERNET	190	1	**RNP**	36	2
FUNET	3	1	**T-lex**	28	10
Gambia	120	3	**TWAREN**	120	14

Pelos dados apresentados na Tabela 4.11, o vetor de Fiedler teve um número de possibilidades consideravelmente menor que o grau mínimo. A média do total de possibilidades para a estratégia do grau mínimo é de 36,3 combinações enquanto a média de possibilidades do vetor de Fiedler é de 3,2. Portanto, do ponto de vista computacional o vetor de Fiedler se mostra uma estratégia melhor, uma vez que exige menos testes para o cálculo da confiabilidade para cada nova aresta inserida. Em redes com muitas combinações de arestas entre vértices com grau mínimo, como o caso das redes BBNplanet ou ERNET, o esforço computacional é significativamente maior.

Por exemplo, consideremos a rede Gambia, mostrada na Figura 4.8. Esta foi uma rede na qual a estratégia do grau resultou no maior aumento possível na confiabilidade da rede. No entanto, ela possui 16 vértices não-adjacentes de grau mínimo, o que gera 120 possibilidades de inserção de arestas para que se possa definir qual par de vértices irá trazer o maior incremento em $\hat{R}(G)$. O cálculo de $\hat{R}(G + v_i v_j)$ para 120 casos torna-se computacionalmente mais demorado que o cálculo do vetor de Fiedler para G.

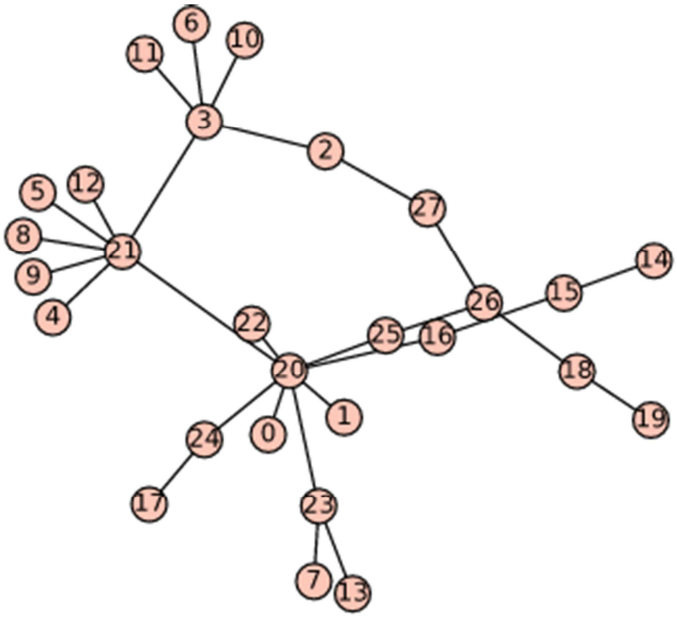


Figura 4.8: Rede Gambia

A Tabela 4.12 mostra um resumo desses casos. Como pode ser visto, embora combinações de inserção de arestas entre os vértices v_6 e v_{14}, ou v_{10} e v_{14}, tragam o maior aumento possível em $\hat{R}(G)$ (11% de aumento), existem outros casos de inserção de arestas entre vértices de grau mínimo que obtiveram aumento significativamente inferior, como por exemplo o caso dos pares v_0 e v_4, ou v_0 e v_5, com apenas 7% de aumento.

Tabela 4.12: Exemplos de inserção de arestas e confiabilidade - rede Gambia

$\widehat{R}(G)$	v_i	v_j	u_i	u_j	$\lvert u_i - u_j \rvert$	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$\widehat{R}(G+\{v_i,v_j\})$	Aumento % em $\widehat{R}(G+\{v_i,v_j\})$
0,63	6	14	-1,8	2,9	4,81	1	1	0,7	11%
	10	14	-1,8	2,9	4,81	1	1	0,7	11%
	11	14	-1,8	2,9	4,81	1	1	0,7	11%
	0	4	1	-0,78	1,78	1	1	0,68	7%
	0	5	1	-0,78	1,78	1	1	0,68	7%
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Com isso, uma outra abordagem importante quando são analisadas todas as possibilidades de inserção de arestas tanto pela estratégia do grau mínimo como pela estratégia do vetor de Fiedler é a diferença, em pontos percentuais, entre o maior e o menor incremento na confiabilidade dado o total de possibilidades de inserção de arestas para uma mesma estratégia. Por exemplo, conforme mostrado na Tabela 4.11 a rede Gambia possui 120 possibilidades de inserção de arestas pelo grau mínimo e na Tabela 4.12 vemos que essa

mesma estratégia consegue um aumento de 11% para a ligação entre os vértices v_6 e v_{14}, mas de apenas 7% quando são ligados os vértices v_0 e v_5, o que gera uma variação de até 4 pontos percentuais no incremento de $\hat{R}(G)$. Por outro lado, a estratégia do vetor de Fiedler gera 3 possibilidades de inserção das quais todas geram exatamente 11% de aumento e, portanto, nenhuma diferença em pontos percentuais para suas possibilidades.

Desta forma, a Tabela 4.20 apresenta as amplitudes, isto é, a diferença entre o aumento máximo e o aumento mínimo no valor da confiabilidade,, utilizando uma dada estratégia de inserção de arestas. No caso da estratégia de ligação entre os vértices com menor grau, a diferença, em pontos percentuais, entre o maior e o menor incremento percentual no valor da confiabilidade é donotada na Tabela 4.13 por $\Delta(\omega)$, enquanto a diferença entre o maior e menor incremento para a estratégia do vetor de Fiedler é denotada por $\Delta(\varphi)$. Para os casos nos quais há somente uma possibilidade de inserção não há valor associado à amplitude.

Tabela 4.13: Amplitude do incremento percentual na confiabilidade para as estratégias do grau mínimo e do vetor de Fiedler, em pontos percentuais

Rede	$\Delta(\boldsymbol{\omega})$	$\Delta(\boldsymbol{\varphi})$	Rede	$\Delta(\boldsymbol{\omega})$	$\Delta(\boldsymbol{\varphi})$
Aarnet	7	-	**GetNet**	-	-
Abilene	4	-	**GlobalNetRu**	10	0
ATMnet	-	-	**GRENA**	37	0
BBNplanet	1	0	**ILAN**	0	0
BSONetwork	3	-	**JGN2plus**	21	0
BT Europe	0	0	**KAREN**	3	0
Claranet	1	0	**KREONET**	15	0
Compuserve	0	0	**MARWAN**	37	0
DataXChange	0	0	**NSF**	1	-
EasyNet	1	0	**PIONIER**	3	0
EEnet	15	0	**Restena**	2	0
Epoc	0	0	**Rhnet**	-	0
ERNET	2	-	**RNP**	4	0
FUNET	1	-	**T-lex**	1	0
Gambia	5	0	**TWAREN**	9	0
			Média	**8**	**0**

Conforme mostra a Tabela 4.13, a média da variação para o grau mínimo é de 8 pontos percentuais, enquanto que para o vetor de Fiedler é de 0. Ou seja, em todos os casos nos quais a estratégia do vetor de Fiedler resultou em mais de uma combinação de inserção de aresta, o incremento no valor da confiabilidade foi sempre o mesmo para todos os casos. Já a estratégia do grau mínimo apresentou variação em 22 das 30 redes estudadas. Esse resultado corrobora o fato do vetor de Fiedler se mostrar uma estratégia mais adequada para o incremento da confiabilidade da rede no caso da existência de muitas possibilidades de inserção de arestas.

Até o momento apresentamos as estratégias de inserção de arestas e seus respectivos impactos no aumento tanto da conectividade algébrica quanto na confiabilidade da rede. Porém, este trabalho também tem como objetivo avaliar se um aumento máximo na conectividade algébrica através da inserção de uma aresta também implica em um incremento máximo na confiabilidade da rede. Conforme mostrado nos Capítulos 1 e 2 o valor de $a(G)$ é muito relacionado na literatura com a robustez da rede. Portanto, cabe avaliar se arestas que ao serem inseridas no grafo conseguem concomitantemente um aumento máximo tanto em $a(G)$ quanto em $\hat{R}(G)$.

Dentre as 30 redes analisadas, em apenas 6 casos a aresta que resultou no maior incremento de $a(G)$ também foi aquela que trouxe o maior incremento de $\hat{R}(G)$. Essas redes são: Abilene, DataXChange, Epoc, ERNET, FUNET e RNP. Tomemos como exemplo a rede ERNET, mostrada na Figura 4.9.

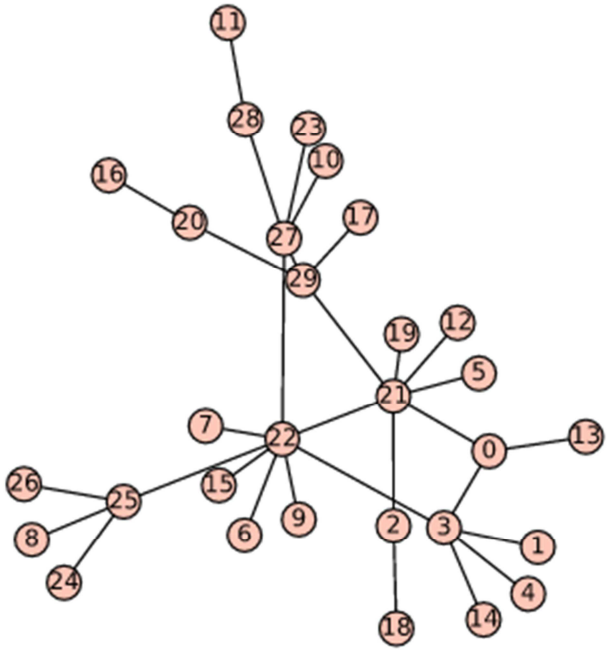


Figura 4.9: Rede ERNET

Neste caso a conectividade algébrica e a confiabilidade original da rede tem valores de 0,16 e 0,68, respectivamente. Após a inserção de uma aresta entre os pares de vértices v_8 e v_{16} (ou entre v_{16} e v_{24}, ou entre v_{16} e v_{26}) os valores de conectividade algébrica e de confiabilidade aumentam para 0,20 e 0,73, o que representa um aumento de 21% e 7%, respectivamente. Esses foram os maiores aumentos possíveis para cada um destes parâmetros dentre todas as possibilidades de inserção de arestas. Apresentamos também, na Tabela 4.14, algumas inserções aleatórias de arestas a fim de mostrar quão distantes os resultados ficam dos incrementos ótimos.

Tabela 4.14: Exemplos de inserção de arestas, conectividade algébrica e confiabilidade - rede ERNET

$a(G)$	v_i	v_j	u_i	u_j	$\lvert u_i - u_j \rvert$	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$a(G + \{v_i, v_j,\})$	**Aumento % em a** $(G + \{v_i, v_j,\})$
0,16	8	16	187,4	-152,1	339,5	1	1	0,20	21%
	16	24	-152,1	187,4	339,5	1	1	0,20	21%
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	16	22	-152,1	34,0	186	1	8	0,18	12%
	22	29	34,0	-79,2	113,2	8	4	0,19	14%
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\widehat{R}(G)$	v_i	v_j	u_i	u_j	$\lvert u_i - u_j \rvert$	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$\widehat{R}(G + \{v_i, v_j,\})$	**Aumento % em** $\widehat{R}(G + \{v_i, v_j,\})$
0,68	8	16	187,4	-152,1	339,5	1	1	0,73	7%
	16	24	-152,1	187,4	339,5	1	1	0,73	7%
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	16	22	-152,1	34,0	186	1	8	0,72	5%
	22	29	34,0	-79,2	113,2	8	4	0,70	3%
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

O Gráfico 4.5 apresenta uma análise comparativa entre o aumento máximo de confiabilidade que pode ser obtido através da inserção de uma aresta (dentre todas as possíveis inserções), o aumento de confiabilidade obtido através da aresta que gera o maior incremento no valor da conectividade algébrica e, como base de comparação, incluímos o aumento percentual médio de confiabilidade, isto é, a média dos aumentos de todas as possíveis inserções de arestas.

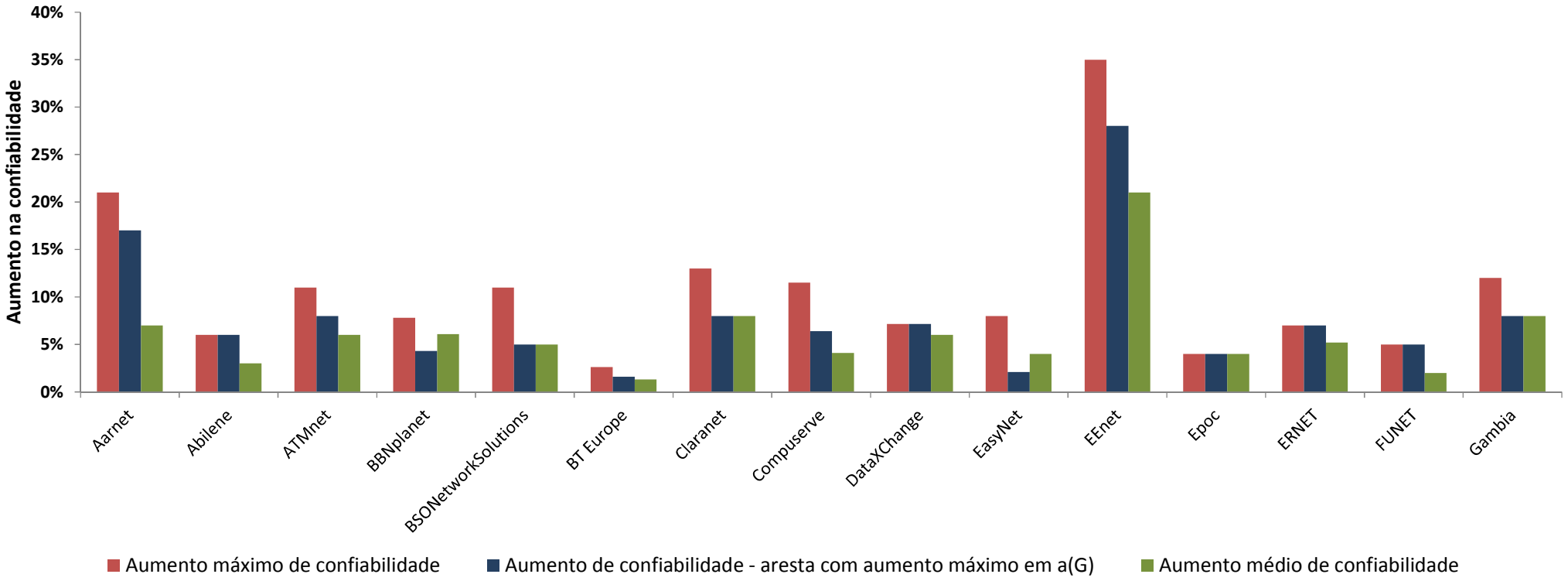


Gráfico 4.5: Análise comparativa entre o maior incremento na confiabilidade da rede e aumento máximo na conectividade algébrica - ρ=0,1

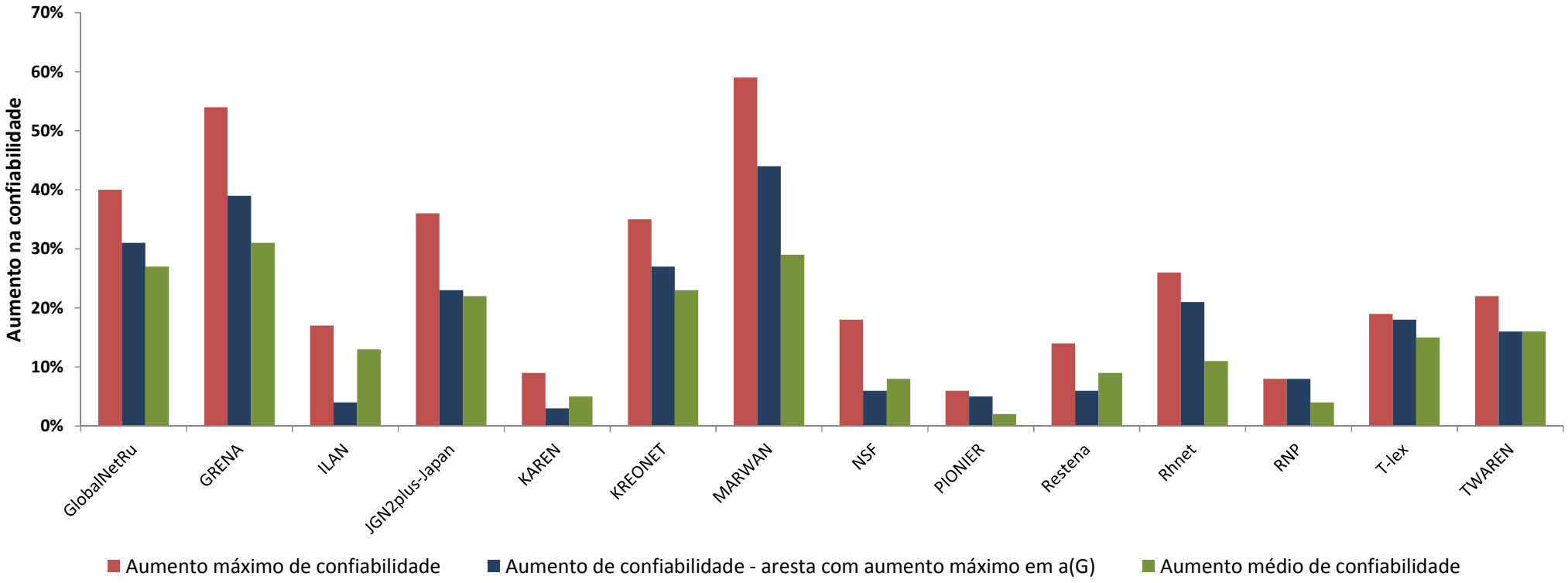


Gráfico 4.7: Análise comparativa entre o maior incremento na confiabilidade da rede e aumento máximo na conectividade algébrica - $\boldsymbol{\rho = 0,1}$

Os gráficos mostram que, de fato, a inserção de uma aresta que traz o aumento ótimo de $a(G)$ consegue, na maior parte dos casos, um aumento da confiabilidade superior ao aumento médio da confiabilidade (isto é, o aumento de $\hat{R}(G)$ esperado caso não fossem utilizadas estratégias de inserção de aresta).

Embora tal conclusão fosse esperada, uma vez que a conectividade algébrica está relacionada com a robustez da rede, é importante notar que em apenas 6 redes, 20% do total, a aresta que trouxe o aumento máximo da conectividade algébrica é também aquela que resultou no maior aumento da confiabilidade. Estas redes são: Abilene, DataXChange, Epoc, ERNET, FUNET e RNP.

Dada a relevância dessa análise para a conclusão dessa pesquisa, optamos por apresentar, também, o Gráfico 4.6, que mostra os resultados de aumento máximo de confiabilidade *versus* aumento de confiabilidade a partir da aresta com aumento máximo da conectividade algébrica (dentre todas as possíveis inserções) *versus* aumento médio na confiabilidade, como apresentado no Gráfico 4.5, porém para valores de probabilidade de falha em arestas ρ igual a 0,05.

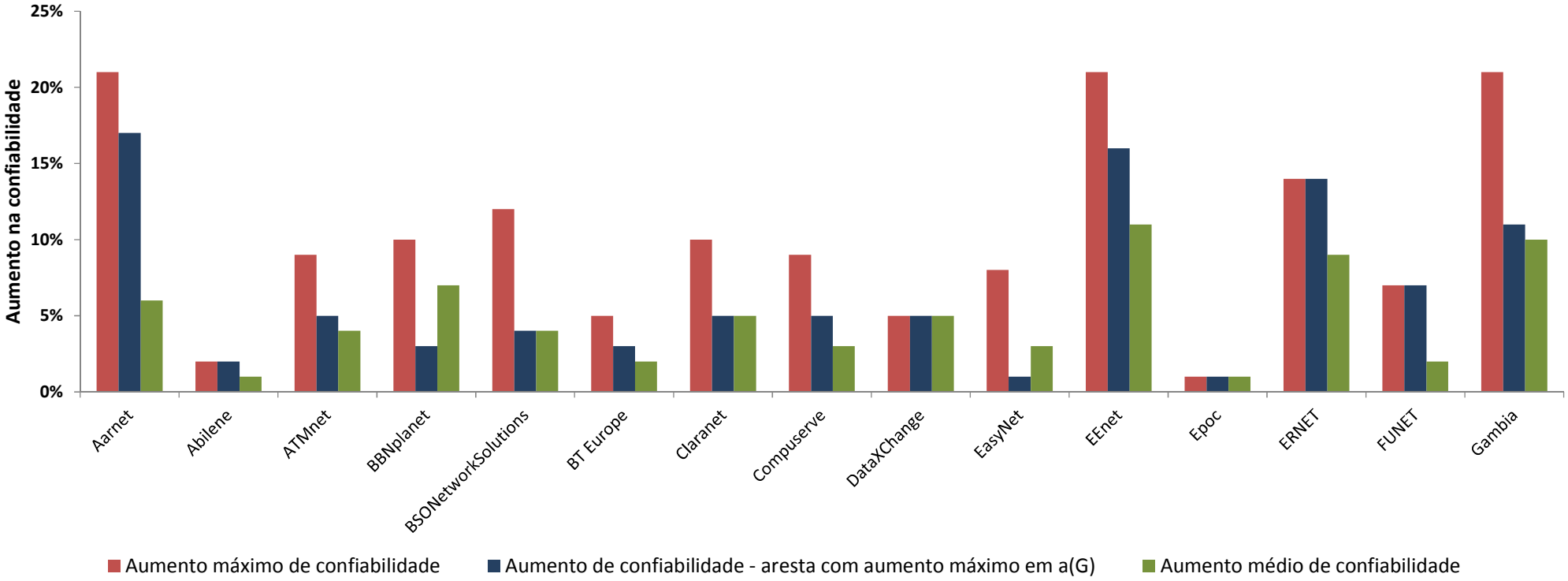


Gráfico 4.8: Análise comparativa entre o maior incremento na confiabilidade da rede e aumento máximo na conectividade algébrica - ρ=0,05

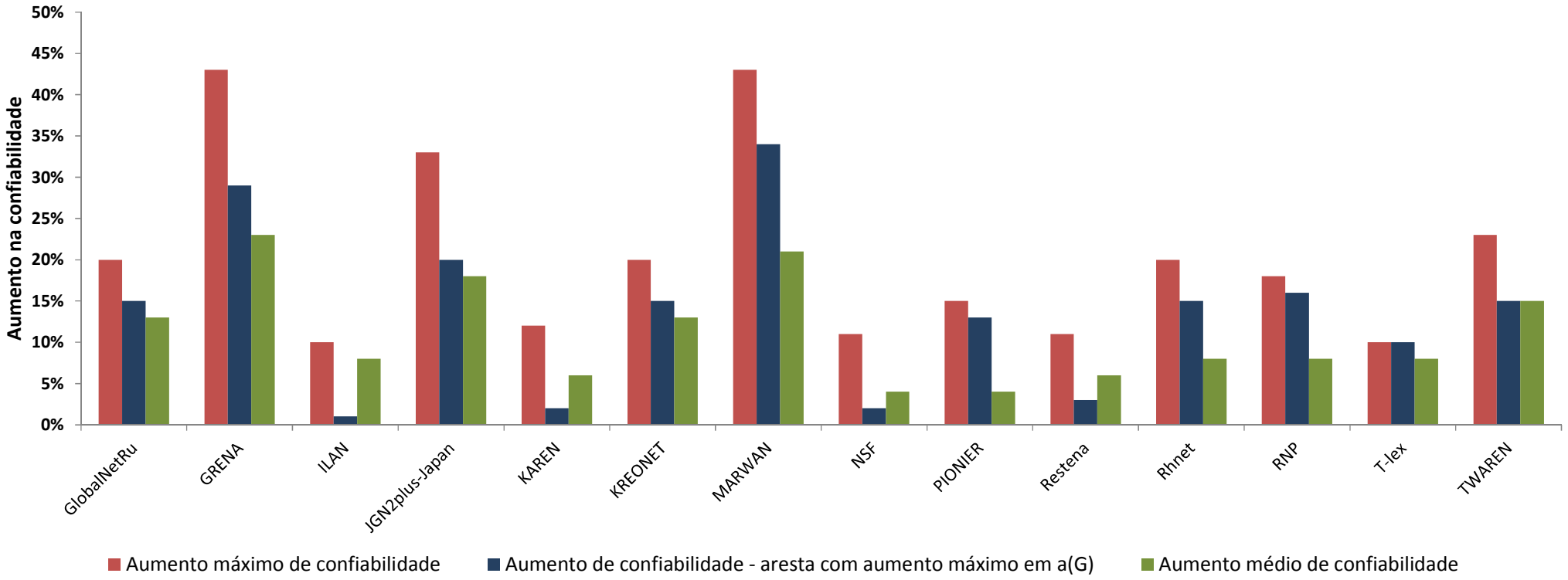
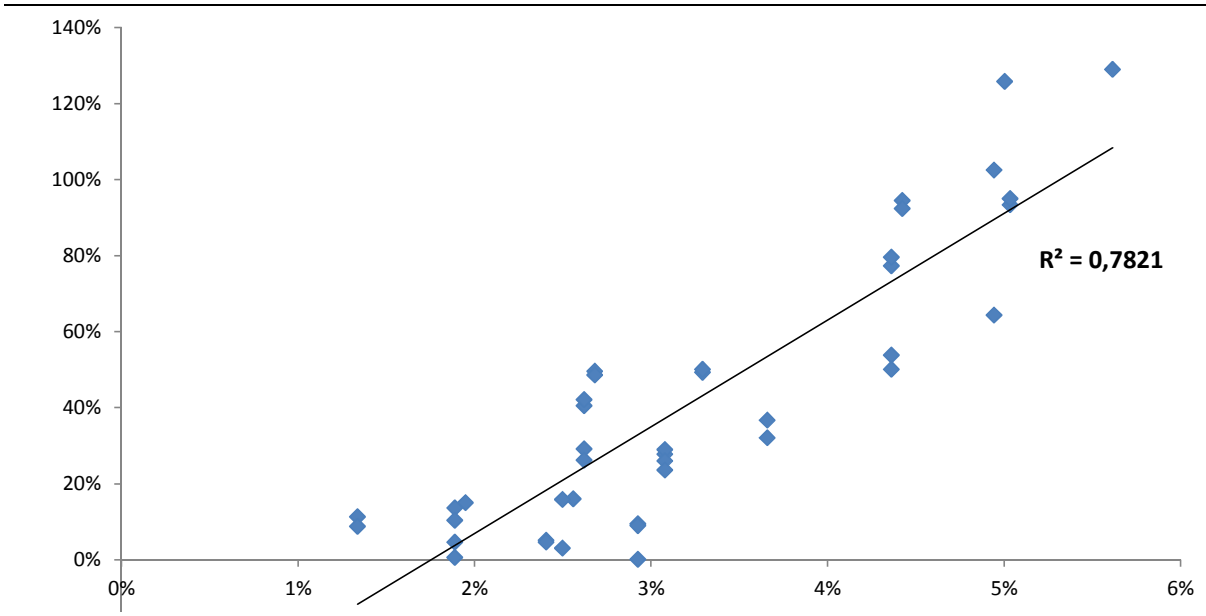


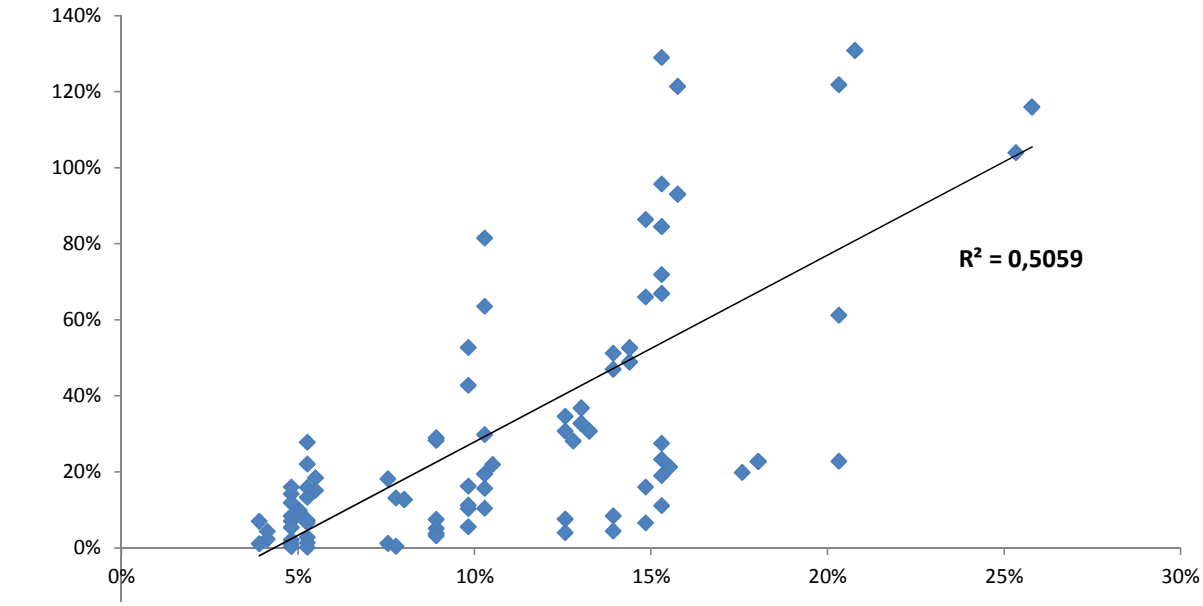
Gráfico 4.9: Análise comparativa entre o maior incremento na confiabilidade da rede e aumento máximo na conectividade algébrica - ρ=0,05

Os resultados mostrados no Gráfico 4.13, quando $\rho = 0{,}05$, seguem a mesma tendência daqueles mostrados no Gráfico 4.12, onde $\rho = 0{,}1$. Na maior parte dos casos, a aresta que trouxe o maior aumento da conectividade algébrica (dentre todas as inserções possíveis) também resultou em um incremento na confiabilidade da rede maior que o incremento médio obtido quando testadas todas as possíveis inserções de arestas. Das 30 redes analisadas esse padrão foi verdade em 24 casos, o que representa 80% do total. Além disso, em 6 casos a aresta que trouxe o maior incremento em $a(G)$ também foi aquela que resultou no maio incremento de $\hat{R}(G)$. Essas redes foram: Abilene, DataXChange, Epoc, ERNET, FUNET e T-lex.

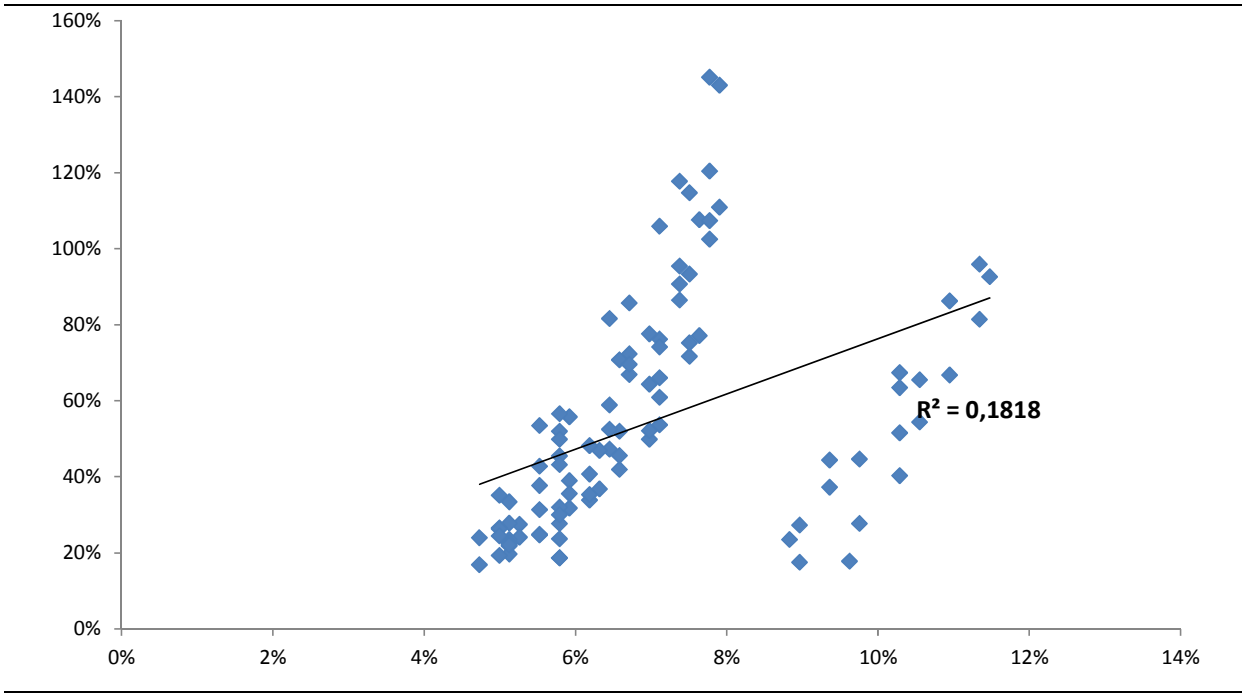
A relação entre $a(G)$ e $\hat{R}(G)$ pode ser mais bem exemplificada pelos Gráficos 4.7. Nele são exibidos os gráficos de correlação entre o aumento percentual na conectividade algébrica e o aumento percentual da confiabilidade da rede para $\rho = 0{,}1$. Optamos por mostrar apenas algumas das redes estudadas, uma vez que seria excessivamente extenso a apresentação do gráfico de correlação para cada uma das 30 redes. Os gráficos apresentam no eixo vertical o aumento percentual na confiabilidade da rede a partir da inserção da aresta e_i e no eixo horizontal o aumento percentual no valor da conectividade algébrica após a inserção da mesma aresta e_i. É mostrado, também, o coeficiente R^2 para a correlação de cada um dos grafos. Como pode ser observado, os Gráficos 4.7 (a) e (b) apresentam boa correlação positiva entre o aumento percentual da conectividade algébrica e o aumento percentual da confiabilidade da rede. No entanto, os Gráficos 4.7 (c) e (d) não mostram esse tendência, apresentando, portanto, baixos valores de R^2. Por isso, optamos por apresentar na Tabela 4.15 com todos valores de R^2 para a correlação entre essas duas variáveis para todas as redes estudadas, tanto para $\rho = 0{,}1$ como para $\rho = 0{,}05$.



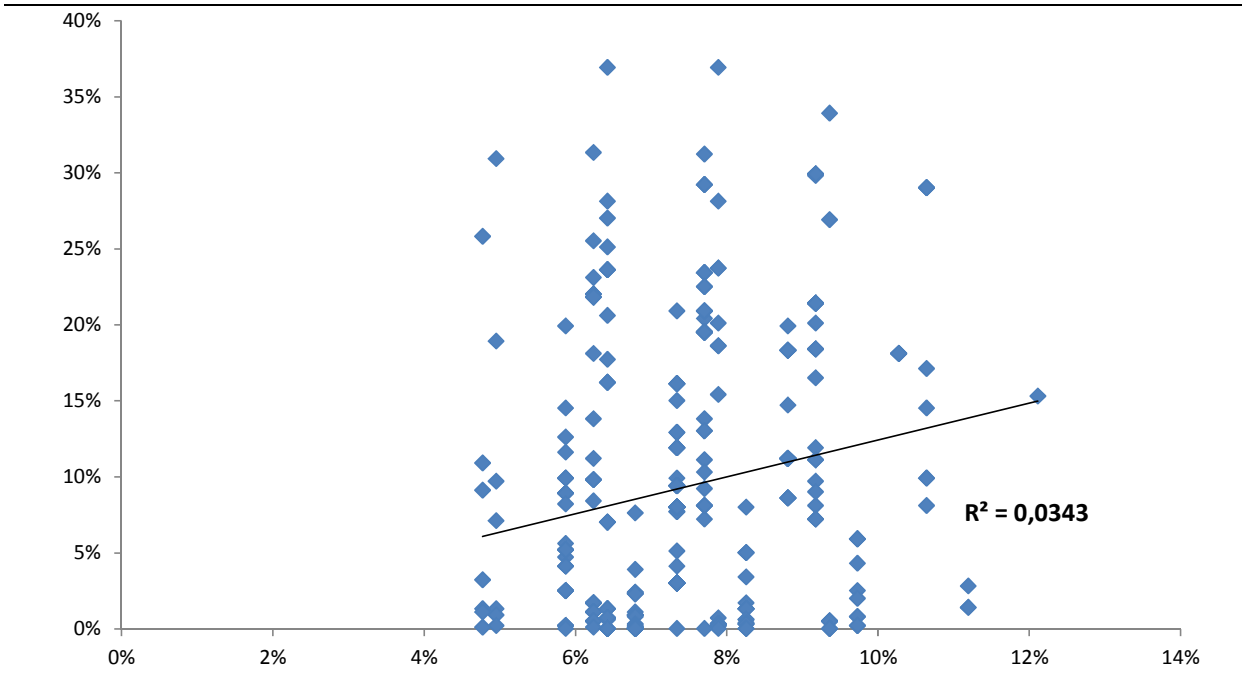
(a) Rede Abilene



(b) Rede RHnet



(c) Rede ATMnet



(d) Rede Gambia

Gráfico 4.10: Gráficos de correlação: aumento da conectividade algébrica e aumento da confiabilidade da rede

Tabela 4.15: Coeficiente de correlação entre aumento da conectividade algébrica e aumento da confiabilidade

	R^2	
Rede	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,05$
Aarnet	0	0,35
Abilene	0,78	0,76
ATMnet	0,18	0,2
BBNplanet	0	0
BSONetworkSolutions	0,18	0,18
BT Europe	0,09	0,09
Claranet	0	0
Compuserve	0,04	0,04
DataXChange	-	-
EasyNet	0,01	0,01
EEnet	0,57	0,55
Epoc	0,92	0,92
ERNET	0,1	0
FUNET	0,01	0
Gambia	0,03	0
GetNet	0,19	0,18
GlobalNetRu	0,59	0,59
GRENA	0,56	0,55
ILAN	0,01	0,01
JGN2plus-Japan	0,67	0,67
KAREN	0	0
KREONET	0,32	0,32
MARWAN	0,68	0,68
NSF	0	0
PIONIER	0,44	0,44
Restena	0,07	0,03
Rhnet	0,5	0,47
RNP	0,43	0,42

T-lex	0	0
TWAREN	0,58	0,58
Média	**0,28**	**0,28**

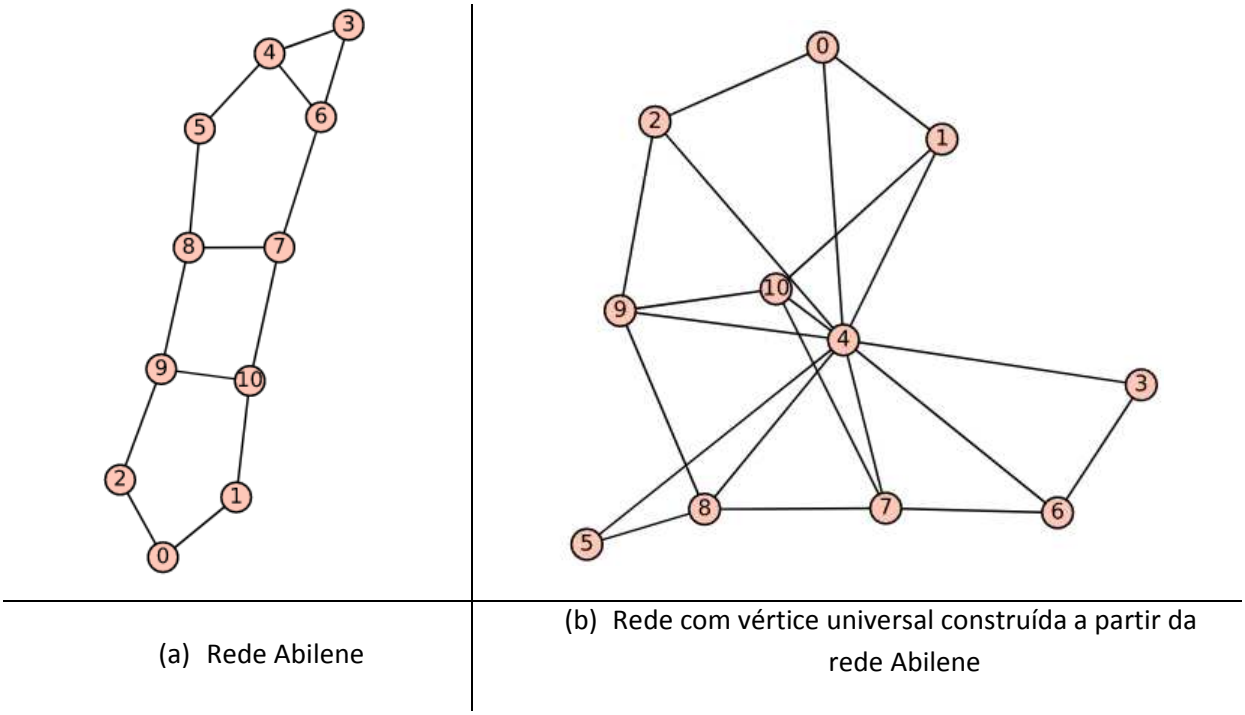
Na Tabela 4.15 podemos ver que não existem diferenças significativas para o coeficiente de correlação de cada uma das redes, dados os diferentes valores de ρ. Além disso, na última linha da Tabela 4.15 é apresentada a média dos valores de R^2 e conforme mostra a média, de apenas 0,28, os valores de R^2 são significativamente baixos para a maior parte das redes, indicando baixa correlação entre os incrementos de conectividade algébrica e de confiabilidade da rede.

Assim, se por um lado os Gráficos 4.12 e 4.13 mostraram que a inserção de uma aresta que traz o maior incremento da conectividade algébrica consegue, na maioria dos casos, um incremento na confiabilidade maior do que a inserção de uma aresta de forma aleatória (isto é, sem uso de estratégia de inserção), por outro lado a Tabela 4.21 mostra que nas redes estudadas não existe correlação direta entre essas variáveis. Ou seja, embora o incremento máximo da conectividade algébrica traga bons resultados de aumento da confiabilidade da rede, não foi comprovada uma correlação direta entre esses valores nesses casos.

4.3 INSERÇÃO DE ARESTAS E O AUMENTO DA CONECTIVIDADE ALGÉBRICA E DA CONFIABILIDADE DA REDE – REDES COM VÉRTICES UNIVERSAIS

Ao final da Seção 4.1 vimos que em redes com poucos vértices a existência de um vértice universal parecia afetar o comportamento da correlação entre aumento na conectividade algébrica e aumento da confiabilidade da rede após a inserção de uma aresta. Nessa seção, verificamos se essa tendência também é verdadeira para redes com maior número de vértices. Para isso, utilizamos as redes que obtiveram na Seção 4.2 bons resultados de correlação entre o incremento de $a(G)$ e de $\hat{R}(G)$ e a partir delas construímos redes com vértices universais tomando como base o vértice de grau máximo de cada uma dessas redes e transformando-o em vértice universal. Para o caso da existência de mais de um vértice com grau máximo optamos por aquele com maior valor, em módulo, associado ao vetor de Fiedler e, persistindo a igualdade, optamos por aquele com menor centralidade de *closeness*. As 15

redes utilizadas foram: Abilene, ATMnet, BSONetworkSolutions, EENET, ERNET, Epoc, Getnet, GlobalNetRu, Grena, JGN2plus-Japan, KREONET, MARWAN, TWAREN, RNP e Rhnet. Como exemplo, tomemos a rede Abilene para mostrar a construção da rede com vértice universal a partir da rede original, conforme mostra a Figura 4.10. Na Figura 4.10 (a) a rede Abilene possui 6 vértices com grau máximo. No entanto, o vértice v_4 tem o módulo da sua respectiva entrada do vetor de Fiedler da rede Abilene igual a $0{,}86$, o maior dentre todos os demais vértices de grau 3. Portanto, foi construída a rede com vértice universal conforme mostrada na Figura 4.10 (b).



(a) Rede Abilene

(b) Rede com vértice universal construída a partir da rede Abilene

Figura 4.10: Construção de rede com vértice universal

O quadro abaixo apresenta a relação dos grafos com vértices universais construídos através dos grafos existentes na base de dados Topology Zoo e apresentados na Seção 4.2, utilizando a metodologia para construção do vértice universal supracitada.

Grafo - Topology Zoo	Novo grafo construído com vértice universal
Abilene	Grafo 1
ATMnet	Grafo 2
BSONetworkSolutions	Grafo 3
EENet	Grafo 4
ERNET	Grafo 5
Epoc	Grafo 6
Getnet	Grafo 7
GlobalNetRu	Grafo 8
Grena	Grafo 9
JGN2plus-Japan	Grafo 10
KREONET	Grafo 11
MARWAN	Grafo 12
TWAREN	Grafo 13
RNP	Grafo 14
Rhnet	Grafo 15

Primeiramente, o Gráfico 4.8 mostra os percentuais de aumento máximo para a conectividade algébrica em todas as redes analisadas, a fim de observar o comportamento dessa invariante em redes com vértices universais após a inserção de arestas. O Gráfico 4.8 mostra que das 15 redes analisadas em 11 casos não houve aumento na conectividade algébrica. Isto é, para todas as possibilidades de inserção de arestas, o valor de $a(G)$ permaneceu igual.

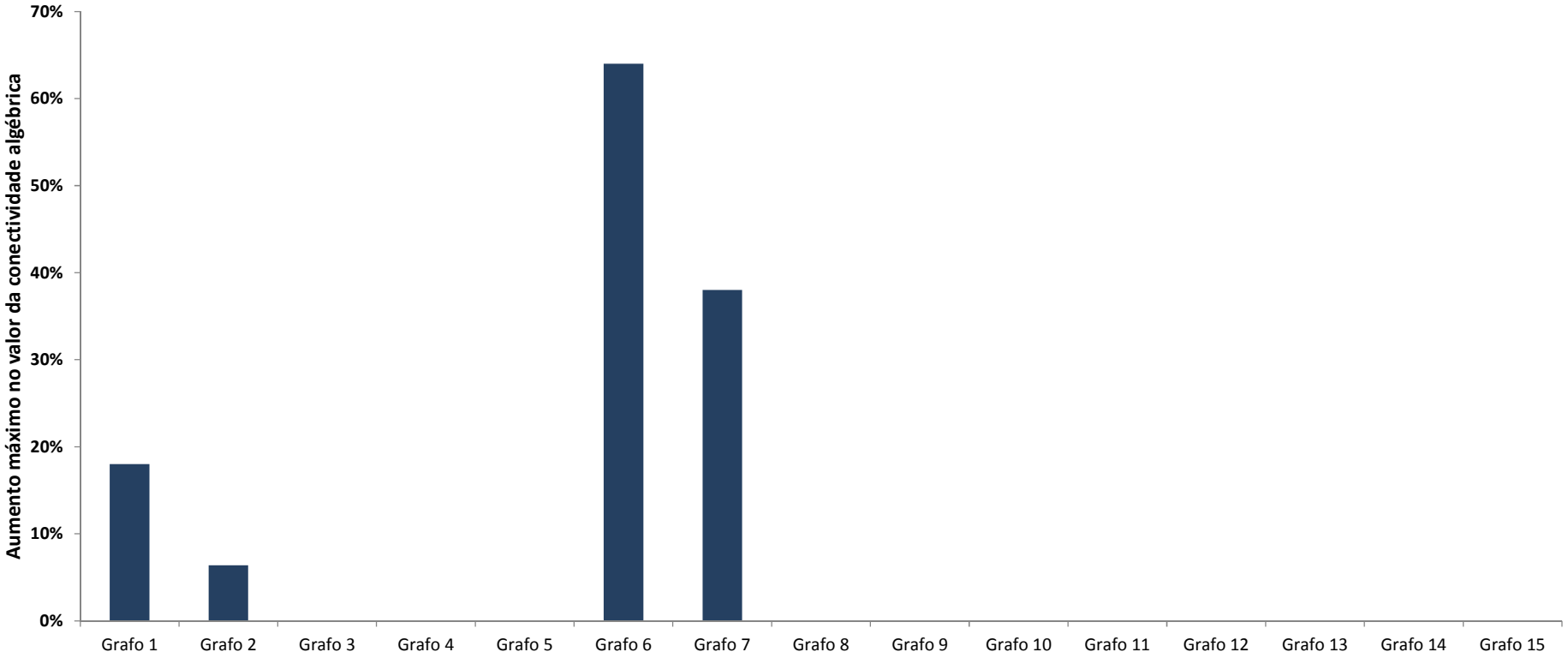


Gráfico 4.11: Aumento máximo na conectividade algébrica para redes com vértices universais

Como exemplo do caso em que não houve alteração no valor da conectividade algébrica após a inserção de aresta, tomemos como exemplo a rede EENET com vértice universal, construída a partir do vértice v_5 da rede EENET e mostradas na Figura 4.11 (a) e (b). As inserções de arestas na rede EENET com vértice universal são mostradas na Tabela 4.16.

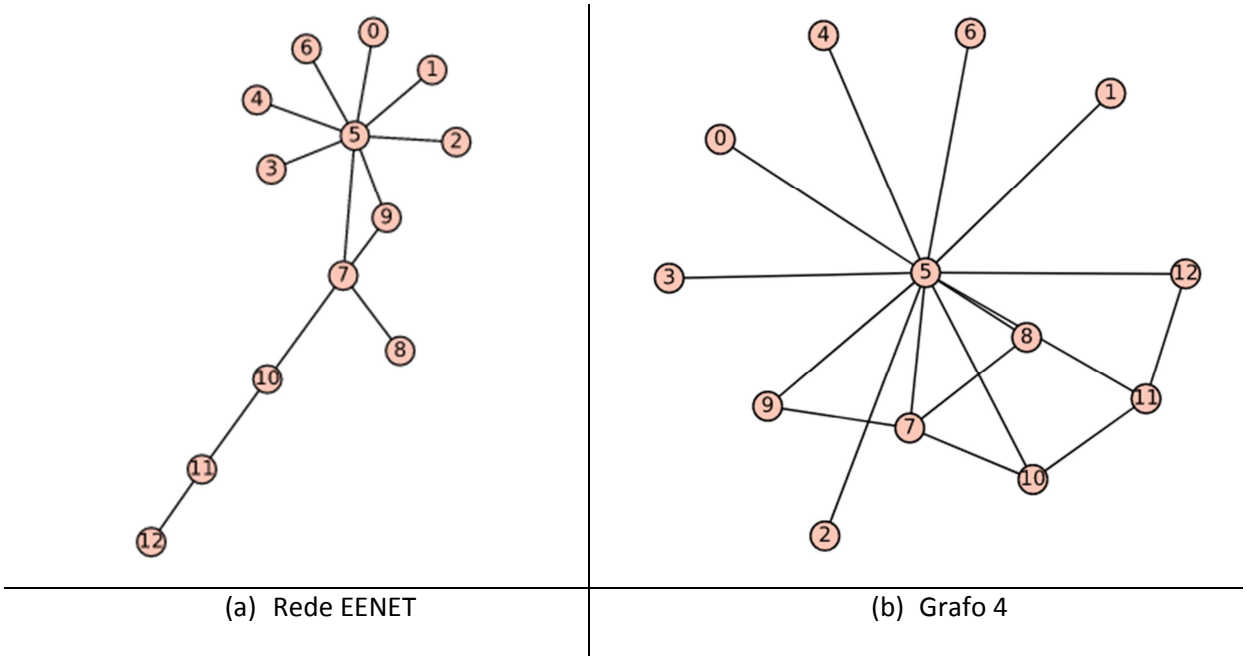


Figura 4.11: Rede com vértice universal contruída a partir da rede EENET

Tabela 4.16: Exemplos de inserção de arestas e conectividade algébrica - rede com vértice universal contruída a partir da rede EENET

$a(G)$	v_i	v_j	u_i	u_j	α	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$c_c(v_i)$	$c_c(v_j)$	$a(G+\{v_i,v_j,\})$	**Aumento % em** $a(G+\{v_i,v_j,\})$
1	0	1	1	0	1	1	1	0,52	0,52	1	0
	0	2	1	0	1	1	1	0,52	0,52	1	0
	0	7	1	-0,16	1,16	1	4	0,52	0,6	1	0
	0	8	1	-0,16	1,16	1	2	0,52	0,54	1	0
	0	9	1	-0,16	1,16	1	2	0,52	0,54	1	0
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Diante desses casos, portanto, a busca pelo aumento da conectividade algébrica com o objetivo de garantir um incremento na confiabilidade do grafo não definiria a melhor aresta a ser inserida, uma vez que não é possível obter aumentos em $a(G)$ para essas redes.

A seguir, apresentamos no Gráfico 4.9 as comparações entre o aumento máximo da confiabilidade, o aumento da confiabilidade através da inserção de uma aresta entre o par de vértices com menores graus e o aumento da confiabilidade através da inserção de aresta entre o par de vértices com maior diferença do vetor de Fiedler, a fim de observar se também existem diferenças no comportamento da relação entre as estratégias de inserção de arestas para grafos com vértices universais.

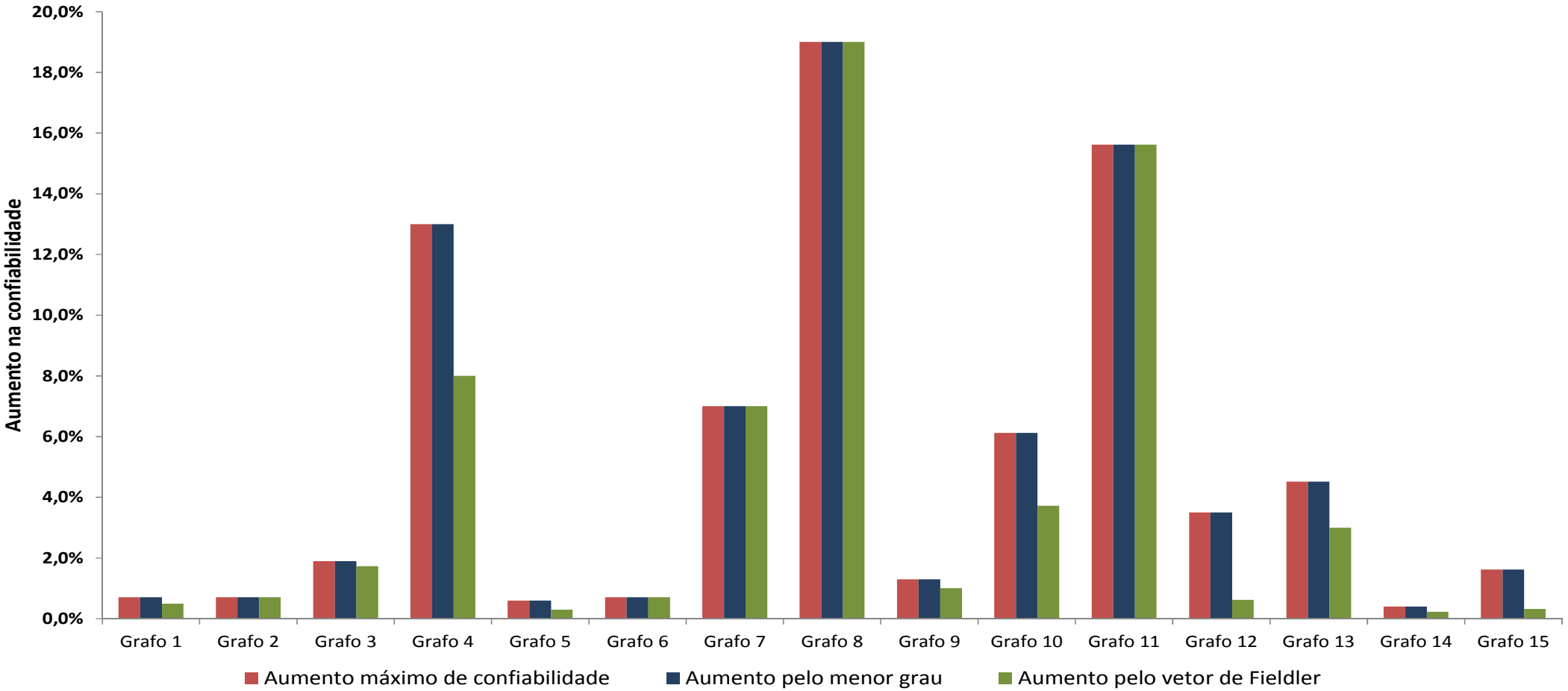


Gráfico 4.12: Análise comparativa entre o maior incremento na confiabilidade da rede, grau mínimo e vetor de Fiedler – ρ = 0,1

Conforme mostra o Gráfico 4.9, das 15 redes analisadas, em todos casos a estratégia da ligação entre os vértices de menor grau foi melhor ou igual que a estratégia do vetor de Fiedler. Esse resultado segue a linha daqueles apresentados na Seção 4.2, tendo a estratégia do grau um melhor desempenho que o vetor de Fiedler. Além disso, um resultado interessante para esses casos, e que não foi visto na Seção 4.2, consiste no fato de que em todos os casos mostrados no Gráfico 4.9 a ligação entre os vértices de menor grau resultou no aumento máximo de confiabilidade.

Tomemos como exemplo a rede Grena – com vértice universal, mostrada na Figura 4.12 (b), construída a partir da rede Grena, mostrada na Figura 4.12 (a), em torno do vértice v_{13}, que possui dentre os vértices de maior grau, o maior coeficiente de entrada do vetor de Fiedler. O detalhamento de inserção de arestas do Grafo 9 é apresentado na Tabela 4.17.

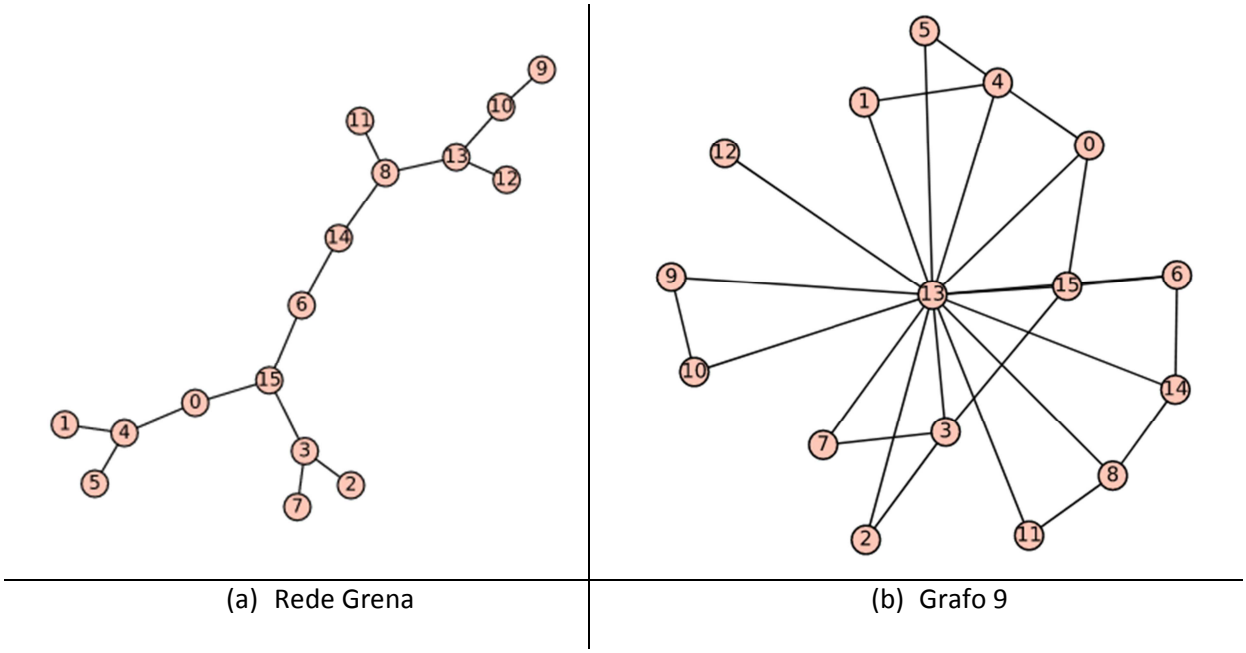


Figura 4.12: Rede com vértice universal contruída a partir da rede Grena

Tabela 4.17: Exemplos de inserção de arestas e confiabilidade - rede com vértice universal contruída a partir da rede Grena

$\widehat{R}(G)$	v_i	v_j	u_i	u_j	α	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$\widehat{R}(G+\{v_i,v_j,\})$	Aumento % em $\widehat{R}(G+\{v_i,v_j,\})$
0,969	0	12	1	-12	13	3	1	0,977	0,84%
	1	12	1	-12	13	2	1	0,979	1,0%
	2	12	1	-12	13	1	2	0,979	1,0%
	9	12	0	-12	12	2	1	0,981	1,3%
	10	12	0	-12	12	2	1	0,981	1,3%
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

A Tabela 4.18 apresenta uma análise similar àquela mostrada na Seção 4.2, indicando o total de possibilidades de inserção de arestas tanto para a estratégia do grau mínimo, denotada por $\boldsymbol{\omega}$, como para a estratégia do vetor de Fiedler, denotada por $\boldsymbol{\varphi}$. Como pode ser visto, diferentemente dos resultados obtidos naquela seção, quando as redes possuem vértices universais o total de combinações de arestas que resultam na maior diferença do vetor de Fiedler aumenta. Nos casos estudados, em média, o grau mínimo resultou em 6 possibilidades de inserção de arestas, enquanto o vetor de Fiedler gerou, em média, 13 possibilidades de inserção.

Tabela 4.18: Total de possibilidades de inserção de arestas - estratégia de vértices de menor grau e estratégia do vetor de Fiedler para redes com vértice universal

Rede	$\boldsymbol{\omega}$	$\boldsymbol{\varphi}$
Abilene - com vértice universal	1	1
ATMnet - com vértice universal	2	19
BSONetwork - com vértice universal	1	15
EENet - com vértice universal	15	6
ERNET - com vértice universal	6	21
Epoc - com vértice universal	3	1
Getnet - com vértice universal	2	5
GlobalNetRu - com vértice universal	6	1
Grena - com vértice universal	7	12
JGN2plus-Japan - com vértice universal	10	7
KREONET - com vértice universal	21	2
MARWAN - com vértice universal	1	40
TWAREN - com vértice universal	15	8
RNP - com vértice universal	3	18
Rhnet - com vértice universal	3	40
Média	**6,4**	**13,0**

Conforme apresentado na Seção 4.2, cabe também mostrar a amplitude dos resultados dos possíveis incrementos na confiabilidade da rede, isto é, a diferença, em pontos percentuais, entre o incremento máximo e o incremento mínimo para uma mesma estratégia de inserção. Por exemplo, na Tabela 4.17 são apresentadas 3 combinações de ligação de vértices com menor grau: v_2 e v_{12}; v_9 e v_{12}; v_{10}e v_{12}. Embora as duas últimas possibilidades tenham trazido o maior aumento percentual na confiabilidade, de 1,3%, a ligação entra os

vértices v_2 e v_{12} trouxe aumento de 1,0%, o que resulta em uma amplitude de 0,3 pontos percentuais. A Tabela 4.19 apresenta as amplitudes para todas as redes estudadas.

Tabela 4.19: Amplitude do incremento na confiabilidade para as estratégias do grau mínimo e do vetor de Fiedler, em pontos percentuais – redes com vértice universal

Rede	$\Delta(\boldsymbol{\omega})$	$\Delta(\boldsymbol{\varphi})$
Abilene - com vértice universal	-	-
ATMnet - com vértice universal	0	0,10
BSONetwork - com vértice universal	-	0,04
EENet - com vértice universal	-	0
ERNET - com vértice universal	0	0
Epoc - com vértice universal	0	-
Getnet - com vértice universal	0	0
GlobalNetRu - com vértice universal	0	-
Grena - com vértice universal	0,30	0,25
JGN2plus-Japan - com vértice universal	0	0,09
KREONET - com vértice universal	0	-
MARWAN - com vértice universal	0	0,15
TWAREN - com vértice universal	0	0,05
RNP - com vértice universal	0	0
Rhnet - com vértice universal	0	0,11

Novamente nota-se uma diferença entre redes com vértice universal e redes sem vértice universal. Enquanto os resultados apresentados na Seção 4.2 apresentam sempre valores de amplitude iguais a 0 para a estratégia do vetor de Fiedler, a Tabela 4.19 mostra que para redes com vértice universal esse valor foi maior do que zero em 7 das 15 redes estudadas, enquanto que para a estratégia do grau mínimo essa diferença aconteceu em somente uma das redes.

Por fim, o Gráfico 4.10 apresenta uma análise comparativa semelhante àquela apresentada na Seção 4.2, comparando o aumento máximo da confiabilidade, com o aumento da confiabilidade obtido pela inserção da aresta que trouxe o maior incremento na conectividade algébrica e, como base de comparação, o aumento médio da confiabilidade. Nesse gráfico são apresentadas somente as redes que obtiveram aumento em $a(G)$, excluindo aquelas apresentadas no Gráfico 4.8 cujo aumento da conectividade algébrica foi igual a zero para todas as possibilidades de inserção de arestas nas redes estudadas nesta seção.

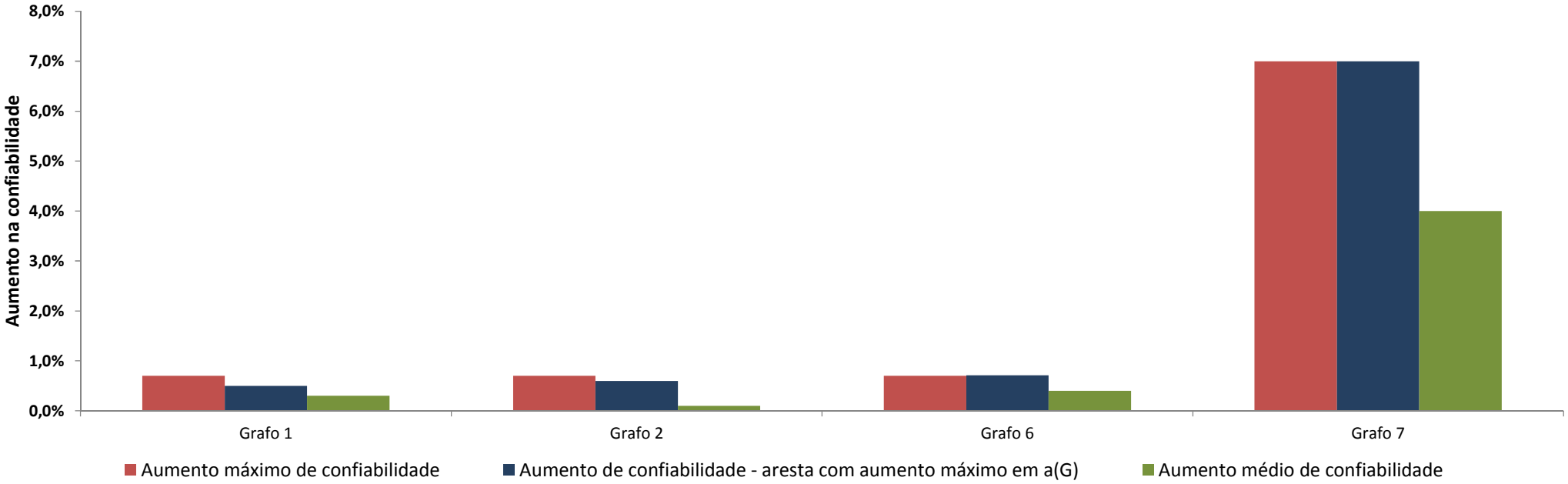


Gráfico 4.13: Análise comparativa entre o maior incremento na confiabilidade da rede e aumento máximo na conectividade algébrica em redes com vértice universal – ρ = 0,1

Conforme mostra o Gráfico 4.10 dos 4 casos apresentados em todos eles o aumento no valor da confiabilidade obtido pela inserção da aresta que trouxe o aumento máximo em $a(G)$ foi maior ou igual que o aumento médio no valor da confiabilidade. Tomemos como exemplo para essas exceções o Grafo 7, mostrado na Figura 4.13 e cujas possibilidades de inserção de arestas são apresentados na Tabela 4.20.

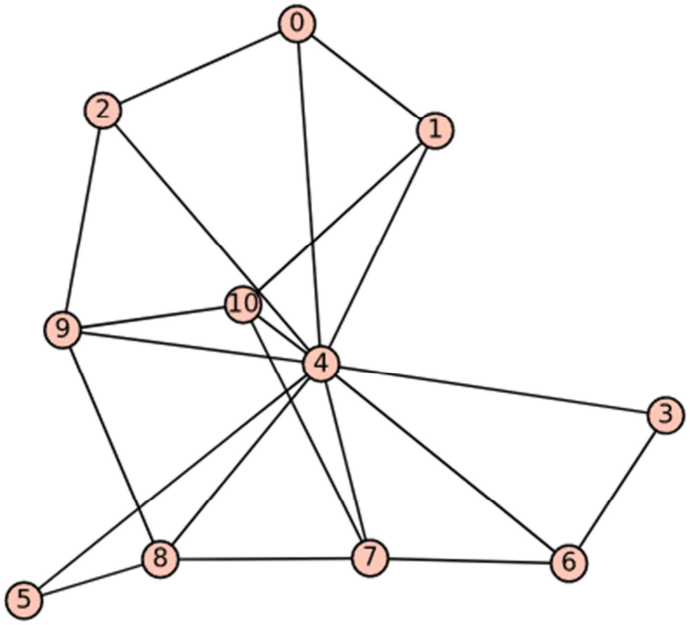


Figura 4.13: Grafo 7

Tabela 4.20: Exemplos de inserção de arestas, conectividade algébrica e confiabilidade – Grafo 7

$a(G)$	v_i	v_j	u_i	u_j	$\lvert u_i - u_j \rvert$	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$a(G + \{v_i, v_j\})$	Aumento % em a$(G + \{v_i, v_j\})$
1	0	2	1	-0,2	1,2	1	3	1,32	32%
	0	3	1	-0,2	1,2	1	2	1,26	27%
	0	4	1	-0,2	1,2	1	3	1,38	38%
	0	6	1	-0,2	1,2	1	2	1,26	27%
	3	5	-0,2	-0,2	0	2	3	1	0%
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\widehat{R}(G)$	v_i	v_j	u_i	u_j	$\lvert u_i - u_j \rvert$	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$\widehat{R}(G + \{v_i, v_j\})$	Aumento % em $\widehat{R}(G + \{v_i, v_j\})$
0,91	0	2	1	-0,2	1,2	1	3	0,975	6,7%
	0	3	1	-0,2	1,2	1	2	0,982	7,4%
	0	4	1	-0,2	1,2	1	3	0,975	6,7%
	0	6	1	-0,2	1,2	1	2	0,982	7,4%
	3	5	-0,2	-0,2	0	2	3	0,923	0,9%
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Nesta seção foi visto que, de fato, redes com vértices universais tiveram um comportamento diferente quanto ao aumento da conectividade algébrica após a inserção de arestas, quando comparado com as redes sem vértices universais mostradas nas Seções 4.1 e 4.2. Enquanto nessas seções a conectividade algébrica apresentou aumento, na maior parte dos casos, após a inserção de uma aresta foi visto nesta seção que na maior parte dos casos não houve variação no valor de $a(G)$.

Outro diferencial observado nas redes com vértices universais foi com relação à estratégia de inserção de aresta com o objetivo do aumento da confiabilidade da rede. Em todos os testes realizados nessa seção a estratégia da ligação com vértices de menor grau foi capaz de trazer o aumento máximo na confiabilidade da rede. Além disso, uma terceira diferença entre os resultados obtidos previamente e aqueles encontrados nessa seção está no total de possibilidades de inserção de arestas para cada uma dessas estratégias. As redes que possuem vértice universal mostraram apresentar um menor número de combinações de inserção de arestas quando são comparadas as estratégias de grau mínimo e do vetor Fiedler, bem como uma alteração no padrão da amplitude no incremento da confiabilidade.

Por outro lado, dentre as 4 redes que obtiveram algum aumento no valor da conectividade algébrica, em todos os casos a aresta que trouxe esse aumento máximo também gerou um incremento no valor da confiabilidade maior que o aumento médio da

confiabilidade. No entanto, para redes com vértices universais a correlação entre o aumento da conectividade algébrica e o aumento da confiabilidade da rede se mostrou também muito baixa, uma vez que embora todas as redes tenham apresentado um aumento mínimo em $R(G)$, 73% dos casos - o que corresponde a 11 redes - não apresentaram nenhum aumento em $a(G)$.

5 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Diversos trabalhos na literatura na área da Teoria Espectral dos Grafos têm como objetivo o aumento no valor da conectividade algébrica, indicando que este parâmetro espectral é uma medida importante e que seu incremento traz um aumento na robustez da rede. Trabalhos relacionados a este tema podem ser vistos em Wei *et al* [48], Wei *et al* [49], Shakeri *et al* [39], Chan e Akoglu [13], Wang e Mieghem [47], entre outros, e, na maior parte dessas pesquisas, a conectividade algébrica está relacionada com a robustez da rede.

Além disso, outra medida de importante aplicação em redes é a confiabilidade, sendo esta definida como a capacidade de uma rede permanecer conexa após a falha de um ou de um subconjunto de vértices e/ou arestas. Na literatura podemos encontrar trabalhos que tem como objetivo o aumento ou a análise da confiabilidade de redes, vide Brown *et al* [12],Walker e Lafiti [46], Lyra e Oliveira [34], Silva [42], Pricinote [37], entre outros. No entanto, a relação prática entre o aumento no valor da conectividade algébrica e o impacto deste aumento na confiabilidade de redes ainda é uma área pouco explorada na literatura, na qual esta dissertação se desenvolveu.

O Capítulo 4 teve como objetivo a simulação de inserção de arestas em diversos tipos de redes e, para isso, foram realizadas três abordagens distintas. A primeira abordagem é com relação à eficácia das diversas estratégias de inserção de arestas e o impacto no aumento do valor da conectividade algébrica. A segunda abordagem é com relação ao impacto destas mesmas estratégias no incremento da confiabilidade da rede, a fim de identificar quão eficazes elas são caso objetivassem o aumento da confiabilidade. Por fim, a última abordagem consiste em correlacionar o incremento da conectividade algébrica com o valor da confiabilidade, isto é, verificar se bons incrementos na conectividade algébrica também resultam em bons incrementos nos valores de confiabilidade.

Os resultados obtidos na Seção 4.1 focam nas estratégias da inserção de arestas entre os vértices com menor grau, entre os vértices com maior diferença α do vetor de Fiedler e entre os vértices com menores centralidades de *betweeness* e *closeness* em grafos com 5 e 6 vértices. Os resultados mostraram que na maioria dos grafos as estratégias de grau mínimo e vetor de Fiedler estão relacionadas, ou seja, na maior parte dos casos o par de arestas a ser inserida com a maior diferença α também coincide com aqueles vértices com menor grau. Desta forma, estas estratégias tiveram o melhor desempenho tanto para o incremento de $a(G)$, como já mostrado pela literatura, como também o melhor desempenho para o incremento da

confiabilidade, fato esse ainda pouco abordado na literatura. A partir disso, nestes grafos os melhores incrementos de $a(G)$ foram relacionados com os melhores aumentos de $\hat{R}(G)$, indicando boa correlação entre essas medidas. Dentre os 18 grafos com 6 vértices, em 15 deles o aumento máximo da conectividade algébrica também foi acompanhado com o aumento máximo da confiabilidade da rede. As exceções que não seguiram essa tendência foram grafos com vértices universais.

As mesmas estratégias utilizadas na Seção 4.1 foram avaliadas em algumas redes reais do site *Topology Zoo*, na Seção 4.2, e mostram que o grau mínimo e o vetor de Fiedler trazem incrementos de conectividade algébrica e na confiabilidade da rede significativamente melhores que a estratégia utilizando as outras medidas de centralidade. Além disso, os resultados também mostram que estas duas estratégias possuem resultados de aumento tanto em $a(G)$ e como em $\hat{R}(G)$ bem próximos quando comparadas as estratégias entre si, e também na maior parte dos casos próximos ao aumento máximo possível. No entanto, a estratégia do vetor de Fiedler se mostrou mais eficiente, uma vez que além de obter bons resultados também apresenta poucas combinações possíveis, enquanto a estratégia do menor grau gera um maior número de possibilidades de inserção, o que aumenta o tempo computacional. Ademais, o vetor de Fiedler não mostrou diferenças nos valores de incremento da confiabilidade entre as suas possibilidades de inserção, enquanto o menor grau apresenta maior amplitude, isto é, além de gerar um maior número de possibilidades de inserção também gera incrementos percentuais de confiabilidade significativamente distintos entre si, o que corrobora a utilização do vetor de Fiedler como uma melhor estratégia para o incremento da confiabilidade. Além disso, foi verificada uma baixa correlação entre o aumento de $a(G)$ e o aumento de $\hat{R}(G)$, um resultado que não era esperado, uma vez que a conectividade algébrica é relacionada com a robustez da rede, que por sua vez pode impactar no valor da confiabilidade. No entanto, dentre as 30 redes estudadas em apenas 6 casos a aresta inserida que gerou o maior aumento da conectividade algébrica foi aquela que gerou o maior aumento na confiabilidade da rede. Embora o vetor de Fiedler seja uma boa estratégia tanto para o incremento da conectividade algébrica como para a confiabilidade da rede, não foram encontrados fortes indícios de correlação positiva entre estes dois invariantes. Este fato se deve porque na maior parte dos casos, embora o vetor de Fiedler traga bons aumentos para a conectividade algébrica, ele não é capaz de gerar os melhores incrementos possíveis. Na Seção 4.2 foi visto que das 30 redes analisadas em 7 casos o vetor de Fiedler trouxe o maior

incremento em $a(G)$, enquanto que em 26 casos essa estratégia obteve o maior incremento possível em $\hat{R}(G)$.

Quanto as redes com vértices universais, os resultados obtidos foram significativamente diferentes daqueles obtidos até então. Nestes casos, foram poucas redes que apresentaram algum tipo de aumento no valor da conectividade algébrica a partir da inserção de uma aresta. Desta forma, não foi possível obter uma relação entre o impacto do incremento na conectividade algébrica para o incremento da confiabilidade da rede. No entanto, um resultado importante que pode ser obtido dessa seção foi o fato de que, no que tange ao aumento da confiabilidade da rede, a estratégia da ligação entre os vértices de menor grau foi superior à estratégia do vetor de Fiedler. Em todas as 15 redes analisadas a estratégia do menor grau foi capaz de gerar o aumento máximo no valor da confiabilidade. Além disso, diferentemente dos resultados encontrados na Seção 4.2, nestes casos a estratégia do menor grau não apresentou as desvantagens de ter um amplo número de possibilidades de inserção nem uma ampla amplitude de incremento da confiabilidade dentre todas as possíveis inserções de arestas.

Dessa forma, essa dissertação foi capaz de atingir os objetivos que foram propostos no Capítulo 1. Primeiramente, foram corroboradas as estratégias existentes na literatura para o aumento da conectividade algébrica, tendo as estratégias da ligação entre vértices de menor grau e a ligação entre vértices com maior diferença α, resultados de incremento próximos do maior incremento possível em $a(G)$. No entanto, foi identificada também uma dificuldade em realizar o aumento de $a(G)$ em redes com vértices universais apenas com a inserção de uma aresta, particularidade essa que não havia sido observada até então.

Em uma segunda abordagem também foram identificadas estratégias para o incremento da confiabilidade da rede a partir da inserção de uma aresta. Nesses casos, o vetor de Fiedler se apresentou como uma estratégia superior ao grau e superior as outras medidas centralidade, pois além de sua capacidade de obter bons aumentos no valor da confiabilidade, também foi capaz de prover um menor número de possibilidades e menor amplitude dos seus resultados, o que reduz o tempo computacional quando utilizada essa estratégia. No entanto, é importante ressaltar que esse comportamento não ocorreu para redes com vértices universais, fato esse que também não era previsto. Portanto, no que tange ao aumento da confiabilidade da rede a ligação entre vértices com menor grau pode ser uma boa solução desde que haja um baixo número de combinações entre vértices com menor grau ou caso a rede tenha vértices universais. Do contrário, a estratégia do vetor de Fiedler se configurou como a melhor opção.

Por fim, a terceira abordagem dessa pesquisa trouxe resultados importantes no que tange a relação entre conectividade algébrica e vetor de Fiedler. Embora em redes com menor número de vértices estes invariantes tenham apresentado boa correlação, quando foram realizados testes para redes com maior número de vértices, tendo ou não vértices universais, não foram encontrados indícios de correlação e em apenas poucos casos a aresta que resultou no maior incremento da conectividade algébrica foi aquela que também gerou o maior incremento no valor da confiabilidade da rede.

Os cálculos de confiabilidade deste trabalho foram limitados para grafos com arestas sujeitas a falhas, tal que a probabilidade de falha de cada aresta é igual para todas as arestas do grafo. Cabe em trabalhos futuros uma análise na qual as arestas tenham probabilidade de falha diferente, a fim de verificar se os resultados se mantém ou não, uma vez que em muitos casos práticos o valor de ρ varia de aresta para aresta. Além disso, não foram impostas restrições de custo para inserção de uma nova aresta. No entanto, sabe-se que em diversos problemas reais há, além de uma restrição orçamentária para inserção de arestas, custos diferentes para cada possível aresta a ser inserida. É importante, portanto, que pesquisas futuras realizem uma análise entre o *trade-off* do custo de inserção de uma aresta e o incremento que ela trará na confiabilidade da rede, a fim de verificar se as soluções propostas pelo vetor de Fiedler para o aumento da confiabilidade também são economicamente viáveis, o que pode ser feito, por exemplo, através do desenvolvimento de metaheurísticas VNS que visem a deleção e inserção de arestas conforme os valores de α. Uma outra proposta de trabalho futuro é realizar essas análises considerando para o cálculo da confiabilidade que as falhas ocorram nos vértices.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ALBERT, R., JEONG, H., BARABÁSI, A. Internet: Diameter of the World-Wide Web. Nature. vol. 401, p. 130-131. 1999.

[2] ALENAZI, M., ÇETINKAYA, E., STERBENZ, J. Cost-efficient algebraic connectivity optimization of backbone networks. Optical Switchingand Networking. v.14, p.107 – 116. 2014.

[3] ABREU, N., DEL-VECCHIO, R., TREVISAN, V., VINAGRE, C. Teoria Espectral de Grafos – Uma introdução. Minicurso apresentado no III Colóquio de Matemática da Região Sul. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, Santa Catarina. 2014.

[4] ABREU, N., DEL-VECCHIO, R., VINAGRE, C., STEVANOVIC, D. Introdução à Teoria Espectral de Grafos com Aplicações. Notas em Matemática Aplicada, 27, 2ª edição. In: CNMAC/SBMAC. 2012.

[5] BARIK, S., PATI, S. On algebraic connectivity and spectral integral variations of graphs. Linear Algebra Appl. vol. 397, p. 209-222. 2005.

[6] BAVELAS, A. Communication patterns in task oriented groups. Journal of the Acoustical Society of America, v.22, p. 725-730. 1950.

[7] BIGGS, N. Algebraic Graph Theory. Cambridge University Press, 2a. ed., 1993.

[8] BOLLOBÁS, B. Graph Theory: An Introductory Course. Springer-Verlag. 1979.

[9] BOLLOBÁS, B. Random graphs. Cambridge University Press. 2001.

[10] BONDY, J.A., MURTY, U.S.R. Graph Theory with Applications. Universidade de Waterloo. Ontario, Canada. Elsevier Science Publishing. 1976.

[11] BOYD, S. Convex optimization of graph Laplacian eigenvalues. In: Proc. Int. Congr. Math, vol. 3, p 1311 – 1319. 2006.

[12] BROWN, J.I., COX, D., EHRENBORG, R. The average reliability of a graph. Discrete Applied Mathematics, vol. 177, p. 19-33. 2014.

[13] CHAN, H., AKOGLU, L. Optimizing network robustness by edge rewiring: a general framework. Data Mining and Knowledge Discovery. p.1 – 31. 2015.

[14] DAS, K. The Laplacian spectrum of a graph. Computers & Mathematics with Applications. vol. 48, n.5-6, p. 715-724. 2004.

[15] DIESTEL, R. Graph Theory. Springer-Verlag, New York. Eletronic Edition. 2000.

[16] ERDOS, L. KNOWLES, A. YAU, H., YIN, J. Spectral Statistics of Erdős-Rényi Graphs II: Eigenvalue Spacing and the Extreme Eigenvalues. Communications in Mathematical Physics. vol. 314, n. 3, p. 587 – 640. 2012.

[17] FIEDLER, M. Algebraic connectivity of graphs. Czechoslovak Mathematical Journal 23 (2) (1973) 298–305. 1973.

[18] FREEMAN, L. C. Centrality in Social Networks: Conceptual Clarification, Social Networks, v. 1, pp. 215-23. 1979.

[19] FREITAS, L.Q. Medidas de Centralidade em Grafos. Rio de Janeiro: UFRJ, 2010. 103p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Engenharia de Produção, UFRJ/COPPE, Rio de Janeiro, 2010.

[20] GHOSH, A., BOYD, S. Growing well-connected graphs. Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control. p. 6605 - 6611. 2006.

[21] GODSIL, C., ROYLE, G. Algebraic Graph Theory. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag. 2001.

[22] GOLDSCHMIDT, O., JAILLET, P., LASOTA, R. On reliability of graphs with node failures. Networks, 24, 251 – 259. 2006.

[23] HAEMERS, W.H. Interlacing eigenvalues and graphs. Linear Algebra Appl. 226-228. 1995. p. 593-616.

[24] HARARY, F. The maximum connectivity of a graph, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, v.48, p. 1142 – 1146. 1962.

[25] HOFFMAN, K., KUNZE, R. Linear Algebra. Second Edition. Nova Jersey. Prentice-Hall. 407p. 1971.

[26] HORN, A.R., JOHNSON, C.R. Matrix Analysis. Cambridge University Press. Cambridge, 1985.

[27] JAMAKOVIC, A., UHLIG, S. On the relationship between the algebraic connectivity and graph's robustness to node and link failures. In: Next Generation Internet Networks, Trondheim. IEEE. p.96-102. 2007.

[28] JUSTEL, C.M., RODRIGUES, S., VASCONCELOS, T.P. Sobre a conectividade algébrica em uma subclasse das árvores tipo II. In: Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2013, Rio Grande do Norte. p.3076-3085.2013

[29] KELMANS, A. Connectivity of probabilistic networks. Automatic Telemekhania, 3:98 – 116, 1966.

[30] KIRKLAND, S., MOLITIERNO, J., NEUMANN, M., SHADER, B. On graphs with equal algebraic and vertex connectivity. Linear Algebra and its Applications. v.341, p.45-56. 2002.

[31] KOLOKOLNIKOV, T. Maximizing algebraic connectivity for certain families of graphs. Disponível em < http://arxiv.org/abs/1412.6147v1 >. Acesso em 04 jul. 2016.

[32] MOXLEY, R. L., MOXLEY, N.F. Determining point centrality in uncontrived social networks. Sociometry, v. 37, p. 120-133.

[33] NAGARAJAN, H., RATHINAM, S., DARBHA, S. On maximizing algebraic connectivity of networks for various engineering applications. In: EuropeanControlConference, Austria. 2015.

[34] LYRA, T.F., OLIVEIRA, C.S. Um estudo sobre a confiabilidade de redes e medidas de centralidade em uma rede de coautoria. Revista Eletrônica Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento, v.3, n.2, p.160-172, 2011.

[35] NOOY, W.,MRVAR A., BATAGELJ, V. Exploratory Social Network Analysis With Pajek. USA. Cambridge University Press, New York. 2005

[36] OLIVEIRA, C.C., JUSTEL, C.M. RODRIGUES, S. Sobre o problema aumento máximo de conectividade algébrica. In: Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2012. Rio de Janeiro. p. 4115 – 4125. 2012.

[37] PRICINOTE, M.A. Metodologia para identificação da confiabilidade topológica da rede de transporte público urbano. Brasília: UnB, 2008. 92p. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF. 2008.

[38] ROCHA, I. Sobre o Vetor de Fiedler e as Componentes de Perron de um Grafo. 2012. 79f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Programa de pós-graduação em Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio de Grande do Sul. Rio Grande do Sul. 2012.

[39] SHAKERI, H., ALBIN, N. SAHNEH, D., POGGI-CORRADINI, P., SCOGLIO, C. Maximizing algebraic connectivity in interconnected networks. Disponível em < http://arxiv.org/abs/1510.06785 >. Acesso em 04 jul. 2016.

[40] SHAW, M.E. Communication networks. In.: L. Berkowitz (ed). 2009.

[41] SHPUNGIN, Y. Combinatorial approach to reliability evaluation of network eith unreliable nodes and unreliable edges. InternationalJournalof Computer Science, volume 1, 177-183, n. 3. 2006.

[42] SILVA, T.S.A. Um estudo de medidas de centralidade e confiabilidade em redes. 2010. 54f. Dissertação (Mestrado em Tecnologia) – Programa de Pós-graduação em Tecnologia, Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca – CEFET/RJ. Rio de Janeiro, 2010.

[43] SYDNEY, A. SCOGLIO, C. GRUENBACHER, D. Optimizing algebraic connectivity by edge rewiring. Applied Mathematics and Computation. v. 219, p. 5465 – 5479. 2013.

[44] TEIXEIRA, L.S., ABREU, N.M., LIMA, L.S. Modelos de redes confiáveis. Sistemas e Gestão, 9:488 – 494, 2014.

[45] Topology Zoo. Data set. Disponível em <http://topology-zoo.org/dataset.html>. Acessoem 22 ago. 2016.

[46] WALKER, D. LAFITI, S. Improving bounds on link failure tolerance of the star graph. Information Sciences, v. 190, n. 13, p. 2571-2575. 2010.

[47] WANG, H., MIEGHEM, P.V. Algebraic connectivity optimization via link addition. Bionetics. n.22. Bruxelas, Bélgica. 2008.

[48] WEI, P. SPIERS, G., SUN, D. Algebraic connectivity maximization for air transportation networks. IEEE. Transactions on intelligent transportation systems. vol. 15, n. 2, 2014 (a).

[49] WEI, P. CHEN, L. SUN, D. Algebraic connectivity maximization of an air transportation network: The flight routes' addition/deletion problem. Transportation Research. vol. 61, p.13 – 27. 2014 (b).

[50] HUCKEL, E. Quanten theoretische Beitrage ZumBenzol problem, Z. Phys., 70 204-286. 1931.

[51] CVETKOVIC, D. Graphs and their spectra, Publ. Elektrotehn, Fak., Ser. Mat. Fiz., Univ. Beograd, 354 1-50. 1971.

[52] COLBOURN, C.J. Designs and graphs. Topics in Discrete Mathematics. v.4, 1991.

[53] MOHAR, B., Eigenvalues, diameter and mean distance in graphs, Graphs Combin. 7 (1991) 53–64.

[54] BERMAN, A., ZHANG X., Lower bounds for the eigenvalues of Laplacian matrices, Linear Algebra Appl. 316 (2000) 13–20.

[55] ALON, N., MILMAN,V.D. Isoperimetric inequalities for graphs and superconcentrators, J. Combin. Theory. Ser. B 38 (1985) 73–88.

[56] ABREU, N. M. Old and new results on algebraic connectivity of graphs. Linear algebra and its applications. vol. 423, 53–73. 2007.

[57] CHVÁTAL, V. Tough graphs and Hamiltonian circuits. Discrete Mathematics. vol. 5, 215-228. 1972.

[58] MOSK-AOYAMA, D. Maximum algebraic connectivity augmentation is NP-hard. Operations Research Letters, vol 36, nº 6, p. 677 - 679. 2008

[59] CHAVES, F.S. Análise de confiabilidade e custo de topologias de redes reais: abordagens heurística e determinística. 2016. 52f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas) – Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção e Sistemas, Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca – CEFET/RJ. Rio de Julho, 2016.

APÊNDICE A - Relações entre o aumento no valor da conectividade algébrica e o aumento na Confiabilidade da Rede (grafos com $n = 6$)

Grafo	$a(G_i)$	$\widehat{R}(G_i, 0.5)$	v_i	v_j	u_i	u_j	α	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$c_b(v_i)$	$c_b(v_j)$	$c_c(v_i)$	$c_c(v_j)$	$a(G_i + \{v_{i,}v_{j,}\})$	Aumento % em $a(G_i + \{v_{i,}v_{j,}\})$	$\widehat{R}(G_i + \{v_{i,}v_{j,}\}, 0.5)$	Aumento % em $\widehat{R}(G_i + \{v_{i,}v_{j,}\}, 0.5)$
G_1	2	89%	1	5	1	-1	2	2	2	0,25	0,25	0,62	0,62	2	0%	96%	8%
			1	3	1	0	1	2	2	0,25	0,25	0,62	0,62	2	0%	96%	8%
			1	4	1	0	1	2	2	0,25	0,25	0,62	0,62	2	0%	96%	8%
			3	5	0	-1	1	2	2	0,25	0,25	0,62	0,62	2	0%	96%	8%
			4	5	0	-1	1	2	2	0,25	0,25	0,62	0,62	2	0%	96%	8%
			0	2	0	0	0	4	4	3	3	0,8	0,83	2	0%	94%	5%
			3	4	0	0	0	2	2	0,25	0,25	0,62	0,62	2	0%	96%	8%
G_2	2	94%	1	5	1	-1	2	2	2	0	0	0,625	0,625	2	0%	98%	5%
			1	3	1	0	1	2	2	0	0	0,625	0,625	2	0%	98%	5%
			1	4	1	0	1	2	2	0	0	0,625	0,625	2	0%	98%	5%

			3	5	0	-1	1	2	2	0	0	0,625	0,625	2	0%	98%	5%
			4	5	0	-1	1	2	2	0	0	0,625	0,625	2	0%	98%	5%
			3	4	0	0	0	2	2	0	0	0,625	0,625	2	0%	98%	5%
G_3	0,76	56%	1	2	4,23	-4,2	8,47	2	2	0	0,5	0,55	0,5	1,4	83%	89%	59%
			2	4	-4,2	4,23	8,4	2	2	0,5	0	0,5	0,55	1,4	83%	89%	59%
			1	3	4,23	-2,6	6,85	2	2	0	1,5	0,55	0,625	1,1	44%	88%	56%
			1	5	4,23	-2,6	6,85	2	2	0	1,5	0,55	0,625	1,1	44%	88%	56%
			4	5	4,23	-2,6	6,85	2	2	0	1,5	0,55	0,625	1,1	44%	88%	56%
			3	4	-2,6	4,23	6,8	2	2	1,5	0	0,625	0,55	1,1	44%	88%	56%
			0	2	1	-4,2	5,23	4	2	6,5	0,5	0,83	0,5	1	31%	86%	52%
			3	5	-2,6	-2,6	0	2	2	1,5	1,5	0,625	0,625	0,7	-8%	86%	52%

Grafo	$a(G_i)$	$\widehat{R}(G_i, 0.5)$	v_i	v_j	u_i	u_j	α	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$c_b(v_i)$	$c_b(v_j)$	$c_c(v_i)$	$c_c(v_j)$	$a(G_i + \{v_i, v_j\})$	Aumento % em $a(G_i + \{v_i, v_j\})$	$\widehat{R}(G_i + \{v_i, v_j\}, 0.5)$	Aumento % em $\widehat{R}(G_i + \{v_i, v_j\}, 0.5)$
G_4	1	86%	1	2	1	-0,66	1,67	2	3	0	0,5	0,62	0,71	1,5	50%	95%	11%
			2	4	-0,66	1	1,67	3	2	0,5	0	0,71	0,625	1,5	50%	95%	11%
			4	5	1	-0,66	1,67	2	2	0	0	0,625	0,625	1,3	30%	96%	12%
			1	3	1	-0,66	1,67	2	2	0	0	0,625	0,625	1,3	30%	96%	12%
			1	5	1	-0,66	1,67	2	2	0	0	0,625	0,625	1,3	30%	96%	12%
			3	4	-0,66	1	1,67	2	2	0	0	0,625	0,625	1,3	30%	96%	12%
			3	5	-0,66	-0,66	0	2	2	0	0	0,625	0,625	1	0%	95%	11%
G_5	0,76	86%	4	5	1,61	-1,6	3,2	0	0	0,5	0,5	0	0	1,43	88%	97%	14%
			3	4	-1,6	1,61	3	0	0	0,5	0,5	0	0	1,43	88%	97%	14%
			0	3	1	-1,6	2,6	1,5	0	0,71	0,5	1,5	0	1,18	55%	96%	12%
			0	5	1	-1,6	2,6	1,5	0	0,71	0,5	1,5	0	1,18	55%	96%	12%
			1	3	1	-1,6	2,6	1,5	0	0,71	0,5	1,5	0	1,18	55%	96%	12%
			1	5	1	-1,6	2,6	1,5	0	0,71	0,5	1,5	0	1,18	55%	96%	12%
			2	4	-0,3	1,61	2	6	0	0,83	0,5	6	0	1	32%	95%	11%

Grafo	$a(G_i)$	$\widehat{R}(G_i, 0.5)$	v_i	v_j	u_i	u_j	α	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$c_b(v_i)$	$c_b(v_j)$	$c_c(v_i)$	$c_c(v_j)$	$a(G_i + \{v_i, v_j\})$	Aumento % em $a(G_i +$	$\widehat{R}(G_i + \{v_i, v_j\}, 0.5)$	Aumento % em

														$\{v_i, v_j,\}$)		$\widehat{R}(G_i + \{v_i, v_j,\}, 0.5)$
G_6	1	95%	0	3	1	-1,5	2,5	3	2	0	0	0,71	0,625	1,51	51%	99%	4%
			0	5	1	-1,5	2,5	3	2	0	0	0,71	0,625	1,51	51%	99%	4%
			1	3	1	-1,5	2,5	3	2	0	0	0,71	0,625	1,51	51%	99%	4%
			1	5	1	-1,5	2,5	3	2	0	0	0,71	0,625	1,51	51%	99%	4%
			3	4	-1,5	1	2,5	2	3	0	0	0,625	0,71	1,51	51%	99%	4%
			4	5	1	-1,5	2,5	3	2	0	0	0,71	0,625	1,51	51%	99%	4%
G_7	1,26	69%	1	2	2,73	-3,73	6,46	2	2	0,5	1	0,625	0,625	1,58	25%	91%	32%
			1	3	2,73	-3,73	6,46	2	2	0,5	1	0,625	0,625	1,58	25%	91%	32%
			2	5	-3,73	2,73	6,4	2	2	1	0,5	0,625	0,625	1,58	25%	91%	32%
			3	5	-3,73	2,73	6,4	2	2	1	0,5	0,625	0,625	1,58	25%	91%	32%
			0	3	1	-3,73	4,73	3	2	2,5	1	0,71	0,625	1,43	13%	89%	30%
			2	4	-3,73	1	4,7	2	3	1	2,5	0,625	0,71	1,43	13%	89%	30%
			0	4	1	1	0	3	3	2,5	2,5	0,71	0,71	1,26	-1%	87%	27%

Grafo	$a(G_i)$	$\widehat{R}(G_i, 0.5)$	v_i	v_j	u_i	u_j	α	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$c_b(v_i)$	$c_b(v_j)$	$c_c(v_i)$	$c_c(v_j)$	$a(G_i + \{v_i, v_j,\})$	**Aumento % em** $a(G_i +$	$\widehat{R}(G_i + \{v_i, v_j,\}, 0.5)$	**Aumento % em** $\widehat{R}(G_i + \{v_i, v_j,\}, 0.5)$

														$\{v_i, v_j,\}$)		
G_8	1,43	89%	1	2	-4,5	8,12	12,62	2	2	0,33	0	0,625	0,625	1,78	24%	97%	9%
			2	5	8,12	-4,5	12,62	2	2	0	0,33	0,625	0,625	1,78	24%	97%	9%
			2	4	8,12	-3,5	11,62	2	3	0	1,5	0,625	0,714	2	40%	96%	8%
			1	3	-4,5	3,56	8,06	2	3	0,33	1,3	0,625	0,714	1,60	12%	96%	8%
			3	5	3,56	-4,5	8,06	3	2	1,3	0,33	0,714	0,625	1,60	12%	96%	8%
			0	4	1	-3,5	4,5	4	3	3,5	1,5	0,83	0,714	1,51	6%	95%	6%
			1	5	-4,5	-4,5	0	2	2	0,33	0,33	0,625	0,625	1,43	0%	97%	9%
G_9	1,51	95%	1	2	1	-1,6	2,6	2	2	0	0	0,625	0,625	1,8	19%	99%	4%
			2	5	-1,6	1	2,6	2	2	0	0	0,625	0,625	1,8	19%	99%	4%
			2	4	-1,6	0,48	2,08	2	4	0	1,5	0,625	0,83	2	32%	98%	3%
			1	3	1	-0,8	1,8	2	3	0	0,5	0,625	0,71	1,6	5%	98%	3%
			3	5	-0,8	1	1,8	3	2	0,5	0	0,71	0,625	1,6	5%	98%	3%
			1	5	1	1	0	2	2	0	0	0,625	0,625	1,5	0%	99%	4%

Grafo	$a(G_i)$	$\widehat{R}(G_i, 0.5)$	v_i	v_j	u_i	u_j	α	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$c_b(v_i)$	$c_b(v_j)$	$c_c(v_i)$	$c_c(v_j)$	$a(G_i + \{v_i, v_j,\})$	**Aumento % em** $a(G_i +$	$\widehat{R}(G_i + \{v_i, v_j,\}, 0.5)$	**Aumento % em**

																$\widehat{R}(G_i + \{v_i, v_j\}, 0.5)$
														$\{v_i, v_j\}$)		
G_{10}	1,26	87%	1	2	2,73	-3,7	6,43	2	2	0	0,5	0,625	0,625	1,6	26%	96%	10%
			1	3	2,73	-3,7	6,43	2	2	0	0,5	0,625	0,625	1,6	26%	96%	10%
			2	5	-3,7	2,73	6,43	2	2	0,5	0	0,625	0,625	1,6	26%	96%	10%
			3	5	-3,7	2,73	6,43	2	2	0,5	0	0,625	0,625	1,6	26%	96%	10%
			0	3	1	-3,7	4,7	4	2	3	0,5	0,83	0,625	1,51	19%	95%	9%
			2	4	-3,7	1	4,7	2	4	0,5	3	0,625	0,83	1,51	19%	95%	9%
			1	5	2,73	2,73	0	2	2	0	0	0,625	0,625	1,26	0%	95%	9%
G_{11}	1	45%	0	4	1	-1	2	2	2	2	2	0,55	0,55	1	0%	67%	48%
			0	5	1	-1	2	2	2	2	2	0,55	0,55	1	0%	67%	48%
			2	4	1	-1	2	2	2	2	2	0,55	0,55	1	0%	67%	48%
			2	5	1	-1	2	2	2	2	2	0,55	0,55	1	0%	67%	48%
			0	3	1	0	1	2	2	2	2	0,55	0,55	1	0%	67%	48%
			1	2	0	1	1	2	2	2	2	0,55	0,55	1	0%	67%	48%
			1	5	0	-1	1	2	2	2	2	0,55	0,55	1	0%	67%	48%
			3	4	0	-1	1	2	2	2	2	0,55	0,55	1	0%	67%	48%
			1	3	0	0	0	2	2	2	2	0,55	0,55	1	0%	67%	48%

Grafo	$a(G_i)$	$\widehat{R}(G_i, 0.5)$	v_i	v_j	u_i	u_j	α	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$c_b(v_i)$	$c_b(v_j)$	$c_c(v_i)$	$c_c(v_j)$	$a(G_i + \{v_{i,}v_{j,}\})$	Aumento % em $a(G_i + \{v_{i,}v_{j,}\})$	$\widehat{R}(G_i + \{v_{i,}v_{j,}\}, 0.5)$	Aumento % em $\widehat{R}(G_i + \{v_{i,}v_{j,}\}, 0.5)$
G_{12}	1	67%	0	5	1	-1	2	2	2	0	1	0,55	0,55	1,58	58%	91%	35%
			0	3	1	-0,5	1,5	2	2	0	1,5	0,55	0,625	1,26	26%	89%	33%
			0	4	1	-0,5	1,5	2	2	0	1,5	0,55	0,625	1,26	26%	89%	33%
			1	5	0,50	-1	1,5	3	2	2,5	1	0,71	0,55	1,38	38%	89%	32%
			2	5	0,50	-1	1,5	3	2	2,5	1	0,71	0,55	1,38	38%	89%	32%
			1	3	0,50	-0,5	1	3	2	2,5	1,5	0,71	0,625	1,1	10%	88%	31%
			2	4	0,50	-0,5	1	3	2	2,5	1,5	0,71	0,625	1,1	10%	88%	31%
			3	4	-0,5	-0,5	0	2	2	1,5	1,5	0,625	0,625	1	0%	89%	32%
G_{13}	1,26	89%	0	4	1	-1,3	2,36	3	2	0,5	1	0,71	0,625	1,69	33%	97%	9%
			0	5	1	-1,3	2,36	3	2	0,5	1	0,71	0,625	1,69	33%	97%	9%
			2	4	1	-1,3	2,36	3	2	0,5	1	0,71	0,625	1,69	33%	97%	9%
			2	5	1	-1,3	2,36	3	2	0,5	1	0,71	0,625	1,69	33%	97%	9%
			1	5	0,36	-1,3	1,73	3	2	2	1	0,71	0,625	1,43	13%	97%	9%
			3	4	0,36	-1,3	1,73	3	2	2	1	0,71	0,625	1,43	13%	97%	9%
			1	3	0,36	0,36	0	3	3	2	2	0,71	0,71	1,26	0%	95%	7%

Grafo	$a(G_i)$	$\widehat{R}(G_i, 0.5)$	v_i	v_j	u_i	u_j	α	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$c_b(v_i)$	$c_b(v_j)$	$c_c(v_i)$	$c_c(v_j)$	$a(G_i + \{v_i, v_j\})$	Aumento % em $a(G_i + \{v_i, v_j\})$	$\widehat{R}(G_i + \{v_i, v_j\}, 0.5)$	Aumento % em $\widehat{R}(G_i + \{v_i, v_j\}, 0.5)$
G_{14}	1,26	95%	0	4	1	-1,3	2,3	3	2	0	0,5	0,71	0,625	1,78	40%	98,8%	3,7%
			0	5	1	-1,3	2,3	3	2	0	0,5	0,71	0,625	1,78	40%	98,8%	3,7%
			2	4	1	-1,3	2,3	3	2	0	0,5	0,71	0,625	1,78	40%	98,8%	3,7%
			2	5	1	-1,3	2,3	3	2	0	0,5	0,71	0,625	1,78	40%	98,8%	3,7%
			1	5	0,36	-1,3	1,66	4	2	2,5	0,5	0,83	0,625	1,51	19%	98,7%	3,6%
			3	4	0,36	-1,3	1,66	4	2	2,5	0,5	0,83	0,625	1,51	19%	98,7%	3,6%
G_{15}	1,38	89%	0	4	89%	-1	2	2	2	0	0	0,62	0,62	1,69	22%	97%	10%
			2	4	0,61	-1	1,61	3	2	1,5	0	0,71	0,625	1,6	16%	96%	9%
			0	5	1	-0,6	1,6	2	3	0	1,5	0,625	0,71	1,6	16%	96%	9%
			2	5	0,61	-0,6	1,21	3	3	1,5	1,5	0,71	0,71	1,69	22%	95%	7%
			0	3	1	0	1	2	2	0	0,5	0,625	0,625	1,43	3%	97%	10%
			3	4	0	-1	1	2	2	0,5	0	0,625	0,625	1,43	3%	97%	10%
			1	3	0	0	0	4	2	3,5	0,5	0,83	0,625	1,38	0%	96%	8%

Grafo	$a(G_i)$	$\widehat{R}(G_i, 0.5)$	v_i	v_j	u_i	u_j	α	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$c_b(v_i)$	$c_b(v_j)$	$c_c(v_i)$	$c_c(v_j)$	$a(G_i + \{v_i, v_j\})$	Aumento % em $a(G_i + \{v_i, v_j\})$	$\widehat{R}(G_i + \{v_i, v_j\}, 0.5)$	Aumento % em $\widehat{R}(G_i + \{v_i, v_j\}, 0.5)$
G_{16}	1,69	95%	0	4	1	-1	2	2	2	0	0	0,625	0,625	1,69	0%	99%	4%
			0	5	1	-0,3	1,3	2	4	0	2	0,625	0,833	1,69	0%	98%	3%
			2	4	0,3	-1	1,3	4	2	2	0	0,833	0,625	1,69	0%	98%	3%
			0	3	1	0	1	2	2	0	0	0,625	0,625	1,69	0%	99%	4%
			3	4	0	-1	1	2	2	0	0	0,625	0,625	1,69	0%	99%	4%
			1	3	0	0	0	4	2	2	0	0,833	0,625	1,69	0%	98%	3%
G_{17}	1	68%	0	4	1	-1	2	2	2	0,83	0,83	0,55	0,55	1,58	58%	91%	34%
			0	5	1	-1	2	2	2	0,83	0,83	0,55	0,55	1,43	43%	91%	34%
			2	4	1	-1	2	2	2	0,83	0,83	0,55	0,55	1,43	43%	91%	34%
			2	5	1	-1	2	2	2	0,83	0,83	0,55	0,55	1,58	58%	91%	34%
			0	3	1	0	1	2	3	0,83	3	0,55	0,71	1,10	10%	88%	29%
			1	2	0	1	1	3	2	3	0,83	0,71	0,55	1,10	10%	88%	29%
			1	5	0	-1	1	3	2	3	0,83	0,71	0,55	1,10	10%	88%	29%
			3	4	0	-1	1	3	2	3	0,83	0,71	0,55	1,10	10%	88%	29%

Grafo	$a(G_i)$	$\widehat{R}(G_i, 0.5)$	v_i	v_j	u_i	u_j	α	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$c_b(v_i)$	$c_b(v_j)$	$c_c(v_i)$	$c_c(v_j)$	$a(G_i + \{v_{i,}v_{j,}\})$	Aumento % em $a(G_i + \{v_{i,}v_{j,}\})$	$\widehat{R}(G_i + \{v_{i,}v_{j,}\}, 0.5)$	Aumento % em $\widehat{R}(G_i + \{v_{i,}v_{j,}\}, 0.5)$
G_{18}	1,1	88%	0	5	1	-1	2	2	2	0	0,5	0,55	0,55	1,78	61%	97%	11%
			0	4	1	-0,83	1,83	2	2	0	0,83	0,55	0,625	1,69	53%	97%	11%
			2	5	0,63	-1	1,63	3	2	0,83	0,5	0,71	0,55	1,6	44%	96%	10%
			2	4	0,63	-0,83	1,46	3	2	0,83	0,83	0,71	0,625	1,43	29%	96%	9%
			1	5	0,25	-1	1,25	4	2	3	0,5	0,83	0,55	1,38	25%	96%	9%
			0	3	1	-0,05	1,05	2	3	0	3	0,55	0,71	1,26	14%	95%	8%
			3	4	0	-0,83	0,77	3	2	3	0,83	0,71	0,625	1,18	6%	96%	9%